

Chapitre 2 : Modèles dynamiques des machines synchrones

Introduction

Les machines synchrones peuvent fonctionner en alternateur comme en moteur. Historiquement, ces machines étaient essentiellement utilisées en génératrice, mais le développement de l'électronique de puissance a rendu possible le fonctionnement en moteur.

II.1. Classification des machines synchrones

Les machines synchrones sont classées selon la nature du rotor (sa construction); mais quel que soit le type utilisé, sa vitesse est constante ($N_s = \text{constante}$).

II.1.1. Machines à pôles saillants (entrefer variable)

Elles utilisent des pièces polaires (roue polaire) sur une culasse avec des enroulements d'excitation constituées par des bobines.

Ce type de machines est utilisé dans les centrales hydrauliques (faible vitesse linéique), le rotor comporte $2p$ pôles, sa vitesse de rotation se calcule par : $N_s = 60f/p$ (tr/mn) ou $N_s = f/p$ (tr/s).

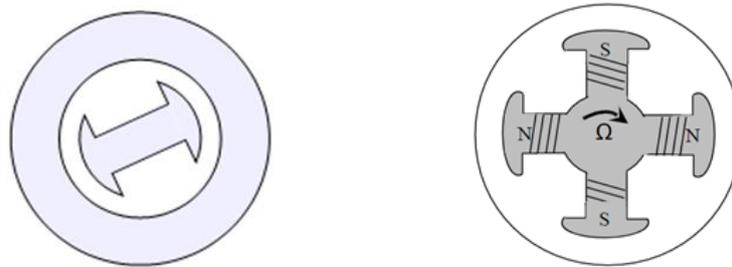


Figure 1. Machine synchrone à pôle saillant : (a) bipolaire ($p=1$). (b) tétra polaire ($p=2$).

II.1.2. Machines à pôles lisses (entrefer constant)

A la différence des précédentes, ces machines ont un entrefer constant, l'enroulement d'excitation étant placé dans des rainures longitudinales usinées sur un cylindre d'acier massif. Le rotor peut comporter plusieurs encoches, autrement dit les bobines peuvent être logées dans plusieurs encoches.

Ce type de machines est utilisé surtout pour les grandes vitesses (turboalternateurs des centrales nucléaires), donc elles ont 3, 2 ou 1 pair de pôles.

Ces machines nécessitent un moteur d'entraînement rapide qui se spécifie par les turbines à vapeur dans les centrales thermiques par exemple; ces machines génératrices de courant portent le nom de turbo-alternateur.

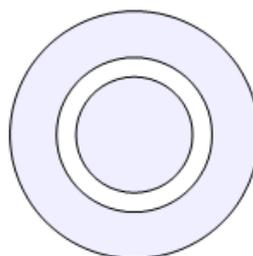


Figure 2. Machine synchrone à pôle lisse

II.1.3. Stator ou induit

Les conducteurs de l'induit, placés dans des encoches autour de la carcasse de la machine, sont groupés en bobine.

Les enroulements du stator sont le siège de courants alternatifs monophasés ou triphasés. Il possède donc le même nombre de paires p de pôles.

Dans une machine synchrone triphasée bipolaire ($p=1$), le stator comporte 3 bobines identiques régulièrement décalées de $360/3 = 120^\circ$.

Dans une machine synchrone triphasée multipolaire ($p>1$), il y a p jeux de 3 bobines identiques, décalées de $360/3p = 120/p$

II.1.4. Champ tournant

Les courants alternatifs dans le stator créent un champ magnétique tournant à la pulsation:

$$\Omega_s = \frac{\omega}{p} \quad \text{ou} \quad N_s = \frac{f}{p}$$

Ω_s : vitesse de rotation du champ tournant en (rad/s)

ω : pulsation des courants alternatifs en (rad/s), $\omega = 2.\pi.f$

N_s : vitesse de rotation du champ tournant en (tr/s)

f : fréquence des courants alternatifs en Hz

p : nombre de paires de pôles.

II.1.5. Synchronisme

Le champ tournant du stator accroche le champ inducteur solidaire du rotor. Le rotor ne peut donc tourner qu'à la vitesse de synchronisme.

III.2 Cas général

D'une manière générale, toute machine (moteur ou générateur) associée à une charge mécanique peut être considérée comme un système où les grandeurs physiques d'entrée sont :

- Un vecteur tension [V] comportant une ou plusieurs composantes.
- Le couple résistant de la charge, noté T_r ou C_r en Nm.

Les grandeurs physiques de sorties sont :

- Un vecteur courant [I] comportant une ou plusieurs composantes.
- La vitesse angulaire de la machine Ω en rad/s.
- La position angulaire de la machine θ du rotor en rad.
- Le couple moteur ou électromagnétique noté T_m T_{em} ou C_m C_{em} en Nm.

La grandeur interne essentielle est le vecteur flux magnétique [Φ]

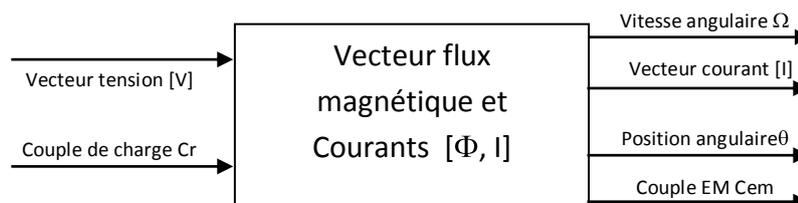


Figure 3. Principe de la conversion électromécanique

III. Les transformations matricielles :

une transformation matricielle consiste à faire correspondre un vecteur : $[x_{abc}] = [x_a \ x_b \ x_c]^t$
un autre vecteur $[w]$ selon une transformation directe :

$$[x] = [T][x_{abc}] \quad (*) \quad \text{et inverse}$$

$$[x_{abc}] = [T]^{-1}[x] \quad (**)$$

III.1. Invariance de la puissance Instantanée :

en triphasé, la puissance instantanée est donnée par :

$$p(t) = v_a(t).i_a(t) + v_b(t).i_b(t) + v_c(t).i_c(t)$$

sous forme matricielle :

$$p(t) = [v_{abc}]^t . [i_{abc}]$$

selon (**), on a : $[v_{abc}] = [T]^{-1}[v]$

donc : $p(t) = ([T]^{-1}[v])^t . ([T]^{-1}[i])$ et on a d'après les propriétés des transformations matricielles : $([T]^{-1}[v])^t = [v]^t . ([T]^{-1})^t$

$$p(t) = ([T]^{-1}[v])^t . ([T]^{-1}[i]) = [v]^t . ([T]^{-1})^t . [T]^{-1}[i]$$

s'il y a une invariance dans la puissance dans la puissance instantanée on aura, alors :

$$p(t) = [v_{abc}]^t . [i_{abc}] = [v]^t . [i]$$

soit : $([T]^{-1})^t . [T]^{-1} = I$, où I : matrice identité.

la matrice $[T]$ est dite orthogonale.

Une matrice réelle $[A]$ carrée d'ordre n est dite orthogonale si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

$$1. [A]^t . [A] = I_n$$

$$2. [A] . [A]^t = I_n$$

$$3. [A]: \text{ est inversible et } [A]^{-1} = [A]^t, [A^{-1}]^t = [A^t]^{-1}$$

La transposée et l'inverse d'une matrice orthogonale sont des matrices orthogonales.

Toute matrice orthogonale a un déterminant égal à ± 1 .

III.2. La transformation de Clark :

Pour un système triphasé équilibré, où : $x_a + x_b + x_c = 0$, la transformée permet le passage d'un repère de trois axes (a, b, c) à un repère de deux axes (α, β) tel que :

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

elle est nommée $Cl = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$; transformée directe de Clark.

Le coefficient $2/3$ est adopté pour la conservation de l'**amplitude**.

$$[x_{\alpha\beta}] = Cl[x_{abc}]; \text{ où } x : \text{ tension, courant, flux ou autres.}$$

et le vecteur associé sous forme complexe : $\bar{x} = x_{\alpha} + jx_{\beta}$

Notion de phaseur

Le phaseur est un vecteur tournant qui contient de l'information a propos de l'amplitude et la phase d'une (tension, courant ou flux). On obtient le phaseur par application de la relation d'Euler :

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

Pour toutes grandeurs x (tension, courant ou flux), on peut écrire :

$$\bar{x} = xe^{j\gamma} = x_a + ax_b + a^2x_c$$

avec : $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ (opérateur de position à 120°), $a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^3 = 1$, $a^4 = a$.

exprimons le vecteur tournant $x(\alpha, \beta)$ par les composantes du phaseur généralisé (x_a, x_b, x_c) :

sur la figure (4), on a : $\bar{x} = x_{\alpha} + jx_{\beta} = x_a + ax_b + a^2x_c$

$$\bar{x} = x_{\alpha} + jx_{\beta} = x_a \cdot e^{j \cdot 0} + x_b \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + x_c \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bar{x} = x_{\alpha} + jx_{\beta} = x_a + x_b \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + x_c \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

la séparation des parties réelles et imaginaires donne :

$$x_{\alpha} = x_a - \frac{1}{2}x_b - \frac{1}{2}x_c$$

$$x_{\beta} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_b - \frac{\sqrt{3}}{2}x_c$$

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_{\alpha} \\ x_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}; \quad [x_{\alpha\beta}] = [T][x_{abc}]$$

Le coefficient $2/3$ est adopté pour la conservation de l'**amplitude**.

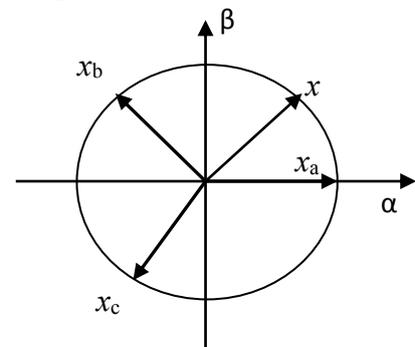


figure (4) : notion de phaseur

La transformation inverse de Clark (Cl^{-1}), dans le sens biphasé \rightarrow triphasé, sera calculée après avoir mis (Cl) sous forme carrée par l'addition de la troisième ligne homopolaire :

$$x_0 = \frac{1}{3}(x_a + x_b + x_c) ;$$

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}; \quad Cl = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{matrice carrée}$$

$$\text{son inverse est : } Cl^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Application : Considérons un système triphasé équilibré de courants où :

$$i_a(t) = I_m \sin(\theta - \varphi)$$

$$i_b(t) = I_m \sin(\theta - \varphi - 2\pi/3)$$

$$i_c(t) = I_m \sin(\theta - \varphi - 4\pi/3)$$

Appliquons la transformée de Clark à ce système pour passer du 3ϕ au 2ϕ .

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i_\alpha = i_a - \frac{1}{2}i_b - \frac{1}{2}i_c \\ i_\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}i_b - \frac{\sqrt{3}}{2}i_c \end{cases}$$

$$i_\alpha = I_m \sin(\theta - \varphi) - \frac{1}{2}I_m \sin(\theta - \varphi - 2\pi/3) - \frac{1}{2}I_m \sin(\theta - \varphi - 4\pi/3),$$

$$i_\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}I_m \sin(\theta - \varphi - 2\pi/3) - \frac{\sqrt{3}}{2}I_m \sin(\theta - \varphi - 4\pi/3)$$

et après développement

$$i_\alpha = I_m \sin(\theta - \varphi)$$

$$i_\beta = -I_m \cos(\theta - \varphi)$$

donc le vecteur de Clark du système est :

$$i_{\alpha\beta} = I_m \sin(\theta - \varphi) - jI_m \cos(\theta - \varphi)$$

Exercice 01 :

Est-ce que la transformation de Clark est orthogonale? cad $[Cl].[Cl]^t = I$

III.3. La transformation de Concordia :

La matrice de Clark n'est pas orthogonale, donc pour cette transformation la puissance n'est pas conservée. alors, La transformée de Concordia est introduite à cet effet :

La composante homopolaire est introduite pour considérer tous les déséquilibres.

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}; Co = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{matrice carrée}$$

Le coefficient $\sqrt{\frac{2}{3}}$ est adopté pour la conservation de **la puissance**.

$$\text{son inverse est } Co^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ on peut écrire : } [x_{\alpha\beta 0}] = [Co][x_{abc}]$$

$$\text{Sous forme usuelle : } Co = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; Co^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Application :

Vérifier que cette matrice est orthogonale :

$$[Co]^t \cdot [Co] = I$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [Co] \text{ est orthogonale.}$$

Exercice :

Vérifier que pour un système triphasé équilibré que :

$$p(t) = v_a(t) \cdot i_a(t) + v_b(t) \cdot i_b(t) + v_c(t) \cdot i_c(t) = v_\alpha(t) \cdot i_\alpha(t) + v_\beta(t) \cdot i_\beta(t)$$

avec les équations aux tensions :

$$v_a(t) = v_m \cos(\omega t), \quad v_b(t) = v_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad v_c(t) = v_m \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

et les courants sont :

$$i_a(t) = v_m \cos(\omega t - \varphi), \quad i_b(t) = v_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right), \quad i_c(t) = v_m \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right)$$

pour un syst. équilibré on a : $v_a(t) + v_b(t) + v_c(t) = 0$ et $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$

$$\text{et } v_o(t) \cdot i_o(t) = 0$$

$$[x_{\alpha\beta}] = [Co][x_{abc}]$$

Pour les tensions : $v_\alpha(t) = \sqrt{3}v_m \cos(\omega t)$

$v_\beta(t) = \sqrt{3}v_m \sin(\omega t)$

Pour les courants : $i_\alpha(t) = \sqrt{3}i_m \cos(\omega t)$

$i_\beta(t) = \sqrt{3}i_m \sin(\omega t)$

la puissance instantanée est :

$p(t) = 3v_m \cdot i_m \cdot \cos(\varphi)$: la puissance active

$p(t) = 3v_m \cdot i_m \cdot \sin(\varphi)$: la puissance réactive.

III.4 Transformation de Park

La transformation de Concordia conserve la puissance instantanée. De cette transformation est réalisée la transformation de Park qui « conserve également la puissance », car la matrice de rotation « est neutre » vis-à-vis cette propriété.

elle est définie comme suit : $[P] = [\rho(\theta)][Co]$, avec $[\rho(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, une matrice de rotation.

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

pour calculer son inverse, on doit injecter les composantes du vecteur homopolaire :

$$[P] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ matrice carrée}$$

$$\text{donc, son inverse est : } [P]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

Cette matrice, Park $[P]$, est orthogonale puisque : $[P]^t = [P]^{-1}$, $\det([P]) = 1$, et $[P]^t \cdot [P] = I$

* Vérifier que $\det([\rho(\theta)]) = 1$, et $[P]^t \cdot [P] = I$; $[P]$ matrice de Park.

$$[P] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$[P]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d[P]^{-1}}{dt} = \omega \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P] \cdot \frac{d[P]^{-1}}{dt} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IV. Modèle du moteur synchrone à pôle lisse à aimants permanents (MSAP)

les aimants sont implantés sur les surfaces latérales du cylindre rotorique. L'existence de l'aimant annule les tensions et les courants rotoriques, le rotor tourne avec la vitesse du synchronisme, pulsation des courants statoriques, donc le glissement est nul. Ce qui implique que l'équation des tensions rotoriques n'existe pas.

$$\bar{v}_r = R_r \bar{i}_r + \frac{d\bar{\varphi}_r}{dt} + j(\omega_s - \omega)\bar{\varphi}_r$$

↑
 $v_r=0$; ↑
 $i_r=0$; ↑
 $\varphi_r=cte$ (flux de l'aimant), $\omega_s - \omega=0$;

il ne reste que l'équation aux tensions du stator, en triphasé, figure (5) :

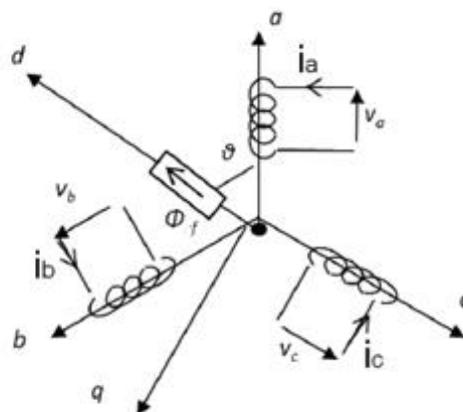


Figure (5) : MSAP dans le repère triphasé.

Les équations électriques :

phase sa/ : $v_{sa} = R_s i_{sa} + \frac{d\varphi_{sa}}{dt}$

$$\text{phasesb/} : v_{sb} = R_s i_{sb} + \frac{d\varphi_{sb}}{dt}$$

$$\text{phasesc/} : v_{sc} = R_s i_{sc} + \frac{d\varphi_{sc}}{dt}$$

En complexes ;

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} + j\omega \bar{\varphi}_s$$

les équations des flux :

le flux totalisé dans la phase (sa) du stator, en exploitant les résultats de la machine généralisée, est :

$$\bar{\varphi}_s = L_s \bar{i}_s + \bar{\varphi}_r$$

$$\bar{\varphi}_r = \bar{\varphi}_f$$

$\bar{\varphi}_f$; flux de l'aimant à une seule composante, selon la direction de l'axe "d", c.à.d. à composante imaginaire nulle.

φ_{as} , φ_{bs} , φ_{cs} flux totalisés à travers les phases a, b et c du stator.

le flux totalisé dans la phase (sa) du stator est :

$$\varphi_{sa} = \varphi_{sap} + \varphi_{s/sa} + \varphi_{r/sa}$$

$$\text{avec} : \varphi_{r/sa} = \varphi_f$$

$$\varphi_{sa} = \varphi_{sap} + \varphi_{s/sa} + \varphi_{r/sa} = l_s i_{sa} + M_s (i_{sb} + i_{sc}) + \varphi_f = l_s i_{sa} - M_s i_{sa} + \varphi_f = (l_s - M_s) i_{sa} + \varphi_f = L_s i_s + \varphi_f$$

de même pour les autres phases.

le couple électromagnétique :

$$C_{em} = k \cdot p \Im m(\bar{i}_s \cdot \bar{\varphi}_s^*) = k p i_{sq} \cdot \varphi_f \quad ; \text{ identique à celui d'une MCC à flux constant.}$$

l'équation mécanique est :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - f_v \Omega$$

IV.1 Modèle vectoriel de la MSAP à pôle lisse

Par intégration du flux :

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} + j\omega_s \bar{\varphi}_s$$

$$\bar{\varphi}_s = L_s \bar{i}_s + \bar{\varphi}_r \Rightarrow \bar{i}_s = \frac{\bar{\varphi}_s - \bar{\varphi}_r}{L_s}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} = \bar{v}_s - R_s \bar{i}_s - j\omega \bar{\varphi}_s = \bar{v}_s - \frac{R_s}{L_s} (\bar{\varphi}_s - \bar{\varphi}_r) - j\omega \bar{\varphi}_s$$

Par intégration du courant :

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} + j\omega \bar{\varphi}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d(L_s \bar{i}_s + \bar{\varphi}_r)}{dt} + j\omega(L_s \bar{i}_s + \bar{\varphi}_r)$$

$$\frac{d\bar{i}_s}{dt} = \frac{1}{L_s} [\bar{v}_s - R_s \bar{i}_s - jp\Omega L_s \bar{i}_s - jp\Omega \varphi_f]$$

IV.2 Modèle de la MSAP lisse en (d,q) :

Par intégration du flux :

$$\frac{d\varphi_{sd}}{dt} = -\frac{R_s}{L_s} (\varphi_{sd} - \varphi_f) + \omega \varphi_{sq} + v_{sd}$$

$$\frac{d\varphi_{sq}}{dt} = -\frac{R_s}{L_s} \varphi_{sq} - \omega \varphi_{sd} + v_{sq}$$

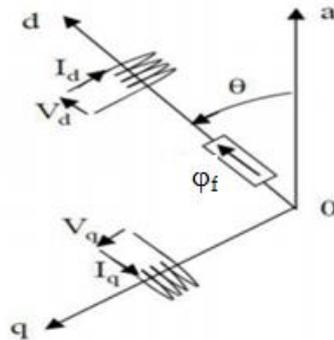


Figure (6) : MSAP sur (d,q)

sous forma matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{sd} \\ \dot{\varphi}_{sq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & \frac{p\Omega}{L_s} \\ -\frac{p\Omega}{L_s} & -\frac{R_s}{L_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{sd} \\ \varphi_{sq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{p\Omega}{L_s} \end{pmatrix} \varphi_f$$

Par intégration du courant :

$$\frac{di_{sd}}{dt} = -\frac{R_s}{L_s} i_{sd} - p\Omega i_{sq} + \frac{1}{L_s} v_{sd}$$

$$\frac{di_{sq}}{dt} = -\frac{R_s}{L_s} i_{sq} - p\Omega i_{sd} + \frac{1}{L_s} v_{sq} - \frac{p\Omega}{L_s} \varphi_f$$

sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & -p\Omega \\ -p\Omega & -\frac{R_s}{L_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{p\Omega}{L_s} \end{pmatrix} \varphi_f$$

IV.3 Modèle vectoriel de la MSAP à pôle saillant :

L'entrefer dans cette machine n'est pas uniforme. Pour :

selon le théorème d'Ampère : $H.e = Ni$;

$$\varphi = B.S ; B = \mu_0.H$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\varphi}{\mu_0.S} \Rightarrow \frac{\varphi}{\mu_0.S} . e = Ni \Rightarrow \varphi = \frac{Ni\mu_0.S}{e}$$

L'inductance propre d'une bobine de N spires traversée par

le courant I et crée le flux φ :

$$L_{p/Bobine} = \frac{N\varphi}{i} = \frac{N Ni\mu_0.S}{i e} \sim \frac{1}{e}$$

Donc, pour : $e=e_{max} \rightarrow L_q$ et $e=e_{min} \rightarrow L_d$, alors : $L_d > L_q$ pour $L_d = L_q$ c'est le pôle lisse.

l'équation du flux du stator :

$$\bar{\varphi}_s = L_s \bar{i}_s + \bar{\varphi}_f ; \text{ par projection sur les deux axes (d,q) :}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{sd} \\ \varphi_{sq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_f \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'équation au tension du stator c'est toujours : $\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\varphi}_s}{dt} + j\omega \bar{\varphi}_s$

Par intégration du flux et la projection sur (d,q) :

$$\frac{d\varphi_{sd}}{dt} = -R_s i_{sd} + p\Omega \varphi_{sq} + v_{sd}$$

$$\frac{d\varphi_{sq}}{dt} = -R_s i_{sq} - p\Omega \varphi_{sd} + v_{sq}$$

avec : $i_{sd} = \frac{\varphi_{sd} - \varphi_f}{L_d}$

le Couple électromagnétique :

$$C_{em} = k.p \Im m(\bar{i}_s . \bar{\varphi}_s^*) = kp[(L_d - L_q)i_{sd} . i_{sq} + \varphi_f i_{sq}]$$

si $L_d=L_q \Rightarrow C_{em} = kp[\varphi_f i_{sq}]$; MSAP à pôle lisse.

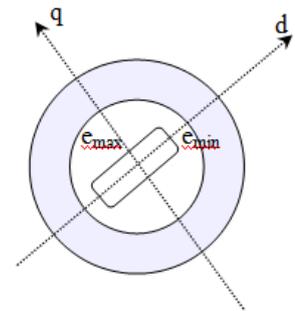


figure (7) : MSAP à PS

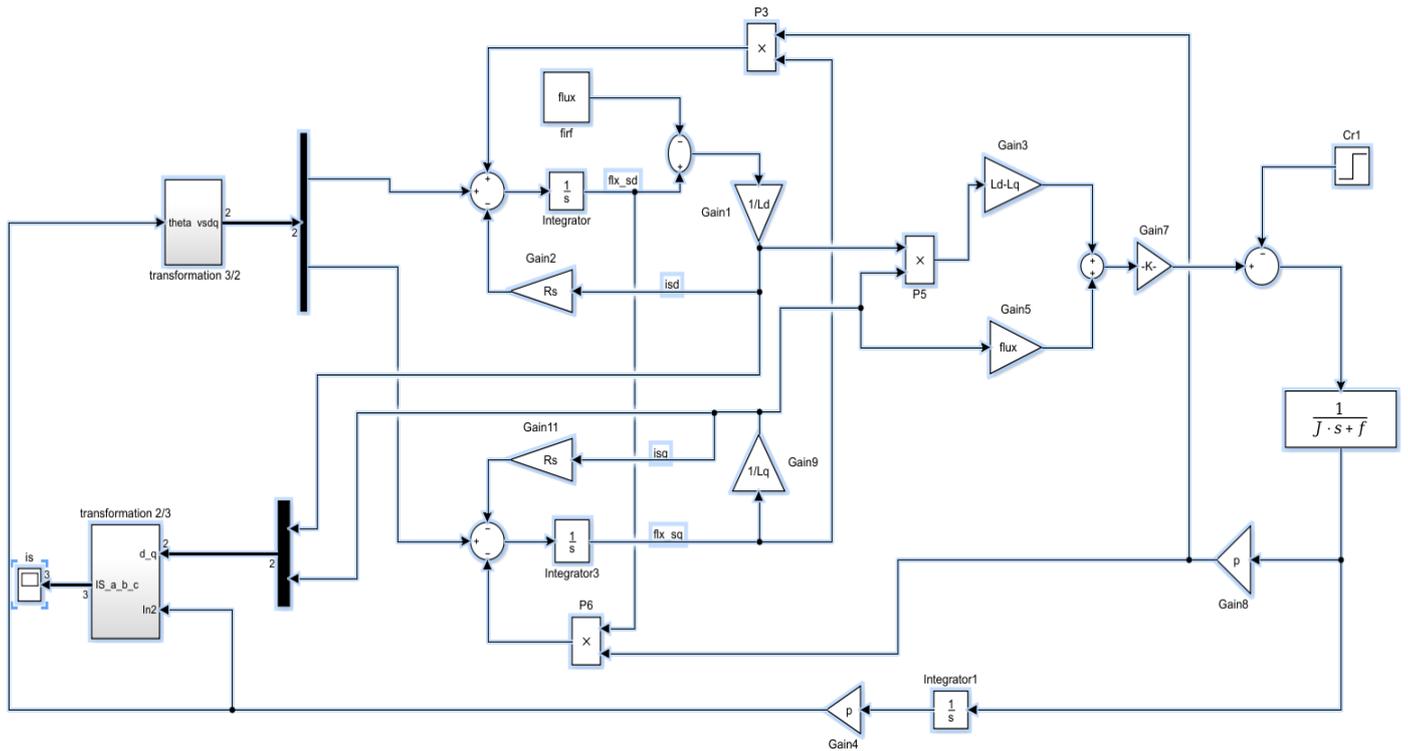
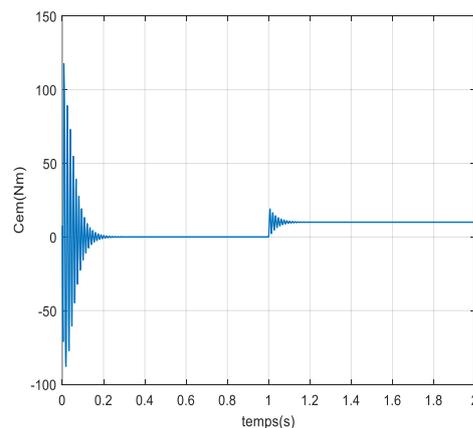
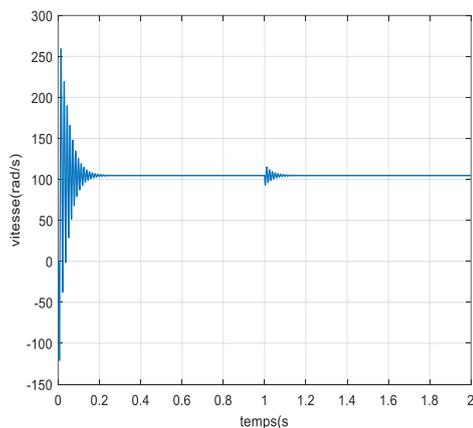


figure (8) : Modèle de la MSAP à pôle saillant sur Simulink en (d,q), modèle flux.

IV.4 Simulation et Résultats :

La simulation est effectuée par Simulink, en choisissant Range Kutta d'ordre 4 comme outils de solution. Les principales grandeurs sont présentées ci-dessous. La vitesse, le couple électromagnétique, les flux et les courants ainsi que les tensions d'alimentation. Des fortes oscillations au démarrage qui sont dues à l'inertie de la machine.



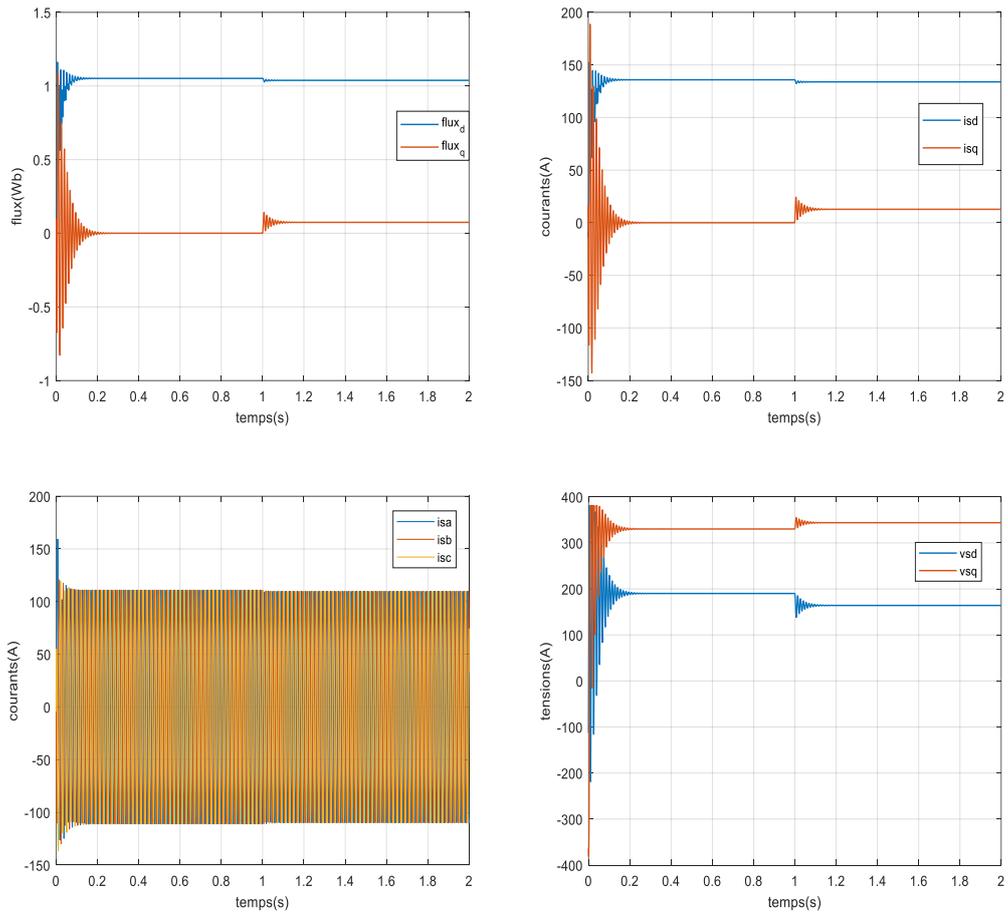


Figure (9) : Résultats de simulation.