

Chapitre 2

Modèles dynamiques des machine synchrones

Prérequis: Connaissance des modèles des machines AC, Maitrise des comportement pour les différents régimes, connaissances préalables automatique asservissements et électronique de puissance.

Objectif : A l'issu de ce chapitre l'étudiant sera capable de:

- ✓ Etablir les modèles généraux des machines synchrones à FEM sinusoïdale
- ✓ Déduire les performances maximales de ces machines sous différentes contraintes
- ✓ Connaitre les différents modèles spécifiques (et en générale plus simples) en vue de leur commande

*La science n'est pas seulement une connaissance mais
elle est aussi une éducation"*

Introduction:

Une machine commandée ou non, son fonctionnement constitué d'une succession de régimes transitoires et de régimes stationnaires, les uns et les autres de durée variable. Parmi les objectifs de la commande est de rétablir, le plus rapide possible, un régime stationnaire après une perturbation afin de limiter au mieux les effets indésirables, ce qui exige la connaissance d'un modèle dynamique. En plus, ce nouveau régime soit le plus efficace possible pour déterminer quelle performance on peut atteindre de la machine dans les conditions de l'étude.

Donc, la modélisation d'une machine au sein d'un système de conversion électromécanique est une tâche indispensable afin de le simuler ou bien le commander.

Dans la première partie nous établirons un modèle générale basé sur des hypothèses justifiées dans la majorité des machines, ensuite, nous donnerons les équations générales de Park, puis, nous étudierons les caractéristiques du fonctionnement en régime stationnaire. En dernière partie, nous établirons les modèles simplifiés e vue de leur commande.

2.1 Généralités sur les structures et les modèles,[1], [2], [3]:

2.1.1 Structure des machines et premières hypothèses de la modélisation

Seulement les machines ont un stator lisse (entrefer constant) qui seront étudiées (machine à reluctance variable ne sera pas traiter).

le rotor peut être lisse ou saillant. la saillance se traduit par une modification importante des modèles et des équations, même aussi des performances.

Les machines synchrones sont munies d'une excitation rotorique, réglable dans les machines à rotor bobiné, et constant dans les machines à aimants.

Ces machines peuvent être munies ou non d'amortisseurs sous formes des barres en court-circuit disposées au rotor.

les amortisseurs seront modélisés sous forme d'un système à deux phases (l'une directe et l'autre en quadrature).

Les capacités de fuite (conducteur-conducteur ou conducteur-fer) ainsi que les courants induits dans les tôles statoriques sont négligeables (pertes par : courants de Foucault et hystérésis).

Ces hypothèses permettent de :

- négliger les dynamiques très rapides,
- réduire le nombre de variables d'états,
- établir un modèle général des machines synchrones.

Le modèle général comporte :

- Les équations électriques incluent des variables externes (courants, tension et les flux),
- Les équations mécaniques incluent des variables mécaniques (couple de charge, vitesse et position du rotor):

Sous forme matricielle on peut écrire :

$$[u] = [R][i] + \frac{d}{dt}[\phi] \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} C_{em} = j \frac{d\Omega}{dt} + C_r \\ \Omega = \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad (2.2)$$

Où;

$[u]$, $[i]$ et $[\phi]$: les vecteurs tension, courant et flux respectivement.

$[R]$: matrice diagonale correspondant aux résistances des circuits (réels du stator ou fictifs d'amortisseurs)

C_{em} , C_r et Ω : le couple électromagnétique, couple de charge et la vitesse angulaire du rotor respectivement.

Avec les hypothèses admises:

- Les flux à travers les circuits $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, ainsi que le couple électromagnétique sont fonction des courants (i_1, i_2, \dots, i_n) et de la position (θ) du rotor.
- Les expressions du couple et du flux sont tirées d'une formulation analytique de la Co-énergie W_c , elle-même obtenue par des calculs du champ:

$$\begin{aligned} \phi_j &= \frac{\partial}{\partial i_j} W_c(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n, \theta) \\ C_{em} &= \frac{\partial}{\partial \theta} W_c(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n, \theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

d'après les équations [2.1], [2.2] et [2.3] le modèle général relativement complexe a le mérite de représenter la plupart des variantes des machines synchrones

2.1.2 Hypothèses complémentaires. Modèle initial des machines triphasées sinusoïdales ,[4], [5]:

Nous nous limiterons maintenant aux machines triphasées et ferons les hypothèses suivantes:

- Une répartition spatiale sinusoïdale de conducteurs.
- Courants sinusoïdaux équilibrés implique que les harmoniques sont suffisamment faibles.
- La machine n'est pas saturée.

La figure 2.1 représente une machine à p paire de pôles excitée par une bobine excitatrice f :

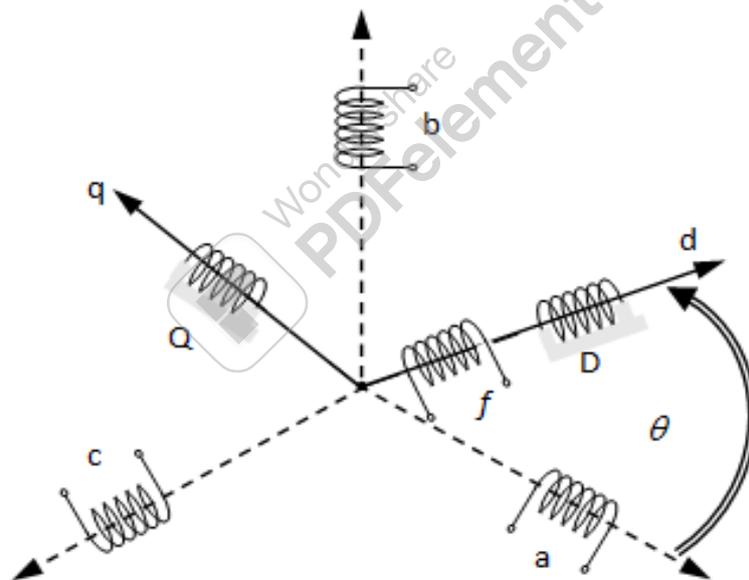


Figure 2.1. Représentation schématique d'une machine synchrone triphasée

les axes de symétrie des bobines statoriques a,b et c sont décalés les uns par rapport aux autres de 120° électriques. θ est le décalage angulaire de l'axe rotorique direct par rapport de la bobine a. Les amortisseurs sont modélisés par deux bobines en court-circuit D et Q situées au rotor.

❖ **Les équations des tensions sont:**

$$[u_{s3r}] = [R_{s3r}][i_{s3r}] + \frac{d}{dt}[\phi_{s3r}] \quad (2.4)$$

Avec les équation suivantes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{s3r} \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{s3} \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{s3r} \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{s3} \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{\phi}_{s3r} \\ \mathbf{\phi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\phi}_{s3} \\ \mathbf{\phi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \\ \phi_f \\ \phi_D \\ \phi_Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{s3r} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Où;

$[u_a \ u_b \ u_c]^t$, $[\phi_a \ \phi_b \ \phi_c]^t$ et $[i_a \ i_b \ i_c]^t$ sont les tensions, flux et courants des phases statoriques.

$[u_f \ 0 \ 0]^t$, $[\phi_f \ \phi_D \ \phi_Q]^t$ et $[i_f \ i_D \ i_Q]^t$ sont les tension, flux et les courants des bobines rotoriques (d'excitation et d'amortissements).

R , R_D , R_Q et R_f sont respectivement les résistances des bobines statoriques, des circuits amortisseurs et de la bobine d'excitation.

❖ **Les équations des flux sont:**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\phi}_{s3r} \\ \mathbf{\phi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\phi}_{s3} \\ \mathbf{\phi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss3} & \mathbf{L}_{s3r} \\ \mathbf{L}_{s3r}^t & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{s3} \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

✚ **Dans les machines à pôles saillants:**

➤ **L'expression des inductances statoriques**, comporte des termes qui tiennent compte de la variation des inductance avec la position du rotor:

$$\begin{aligned}
 [L_{ss3}] &= \begin{bmatrix} L_0 + M_{s0} & \frac{-M_{s0}}{2} & \frac{-M_{s0}}{2} \\ \frac{-M_{s0}}{2} & L_0 + M_{s0} & \frac{-M_{s0}}{2} \\ \frac{-M_{s0}}{2} & \frac{-M_{s0}}{2} & L_0 + M_{s0} \end{bmatrix} + \\
 L_{s2} &\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \cos(2\theta - 2\pi/3) & \cos(2\theta + 2\pi/3) \\ \cos(2\theta - 2\pi/3) & \cos(2\theta + 2\pi/3) & \cos 2\theta \\ \cos(2\theta + 2\pi/3) & \cos 2\theta & \cos(2\theta - 2\pi/3) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ou; L_0 , $L_0 + M_{s0}$ et $\frac{-M_{s0}}{2}$ sont l'inductance de fuite, les valeurs moyennes des inductances propres et mutuelles des bobines statoriques.

L_2 est l'amplitude des variations des inductances en fonction de la position.

- **La matrice d'inductance rotorique** ne comporte que des éléments constants puisque les bobines rotorique sont fixe, donc:

$$[L_{rr}] = \begin{bmatrix} L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{fD} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_D \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Ou;

L_f , L_D et L_Q sont les inductances propre de la bobine d'excitation et les bobines des amortisseurs.

M_{fD} est la mutuelle inductance entre l'excitation et l'amortisseurs direct.

- **La matrice de couplage stator-rotor** $[L_{s3r}]$ est:

$$[L_{s3r}] = \begin{bmatrix} M_0 \cos \theta & M_{aD} \cos \theta & -M_{aQ} \sin \theta \\ M_0 \cos(\theta - 2\pi/3) & M_{aD} \cos(\theta - 2\pi/3) & -M_{aQ} \sin(\theta - 2\pi/3) \\ M_0 \cos(\theta + 2\pi/3) & M_{aD} \cos(\theta + 2\pi/3) & -M_{aQ} \sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

- **Les amortisseurs d'axes d et q :**

On a dans ce cas des valeurs différentes (dissymétriques): $L_Q \neq L_D$, $M_{aQ} \neq M_{aD}$ et $R_Q \neq R_D$.

✚ **Dans les machines à rotor lisse:**

- **L'inductance statorique est indépendante de θ et s'écrit:**

$$[L_{ss3}] = \begin{bmatrix} L_0 + M_{s0} & \frac{-M_{s0}}{2} & \frac{-M_{s0}}{2} \\ \frac{-M_{s0}}{2} & L_0 + M_{s0} & \frac{-M_{s0}}{2} \\ \frac{-M_{s0}}{2} & \frac{-M_{s0}}{2} & L_0 + M_{s0} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

➤ **Les amortisseurs d'axes d et q** : Ont dans ce cas des valeurs identiques (symétriques): $L_Q = L_D$, $M_{aQ} = M_{aD}$ et $R_Q = R_D$.

Remarque: les relations (2.4) et (2.9) sont celles d'une machine triphasée dont les phases sont alimentées indépendamment par des tensions v_a, v_b et v_c . ces relations n'imposent aucune relation entre les courants statoriques.

2.2 Transformation de Concordia et modèle diphasé équivalent [1], [2], [3]:

A ce premier modèle général, on applique une première transformation:

- rien n'est changé aux systèmes réels du rotor (excitation et amortisseurs)
- On applique aux systèmes statoriques triphasés la transformation de Concordia, qui procure un modèle équivalent diphasé auquel est adjoint un système homopolaire.

Elle transforme le repère (Oabc) (figure 2.2a) en repère (Ooαβ)(figure 2.2b):

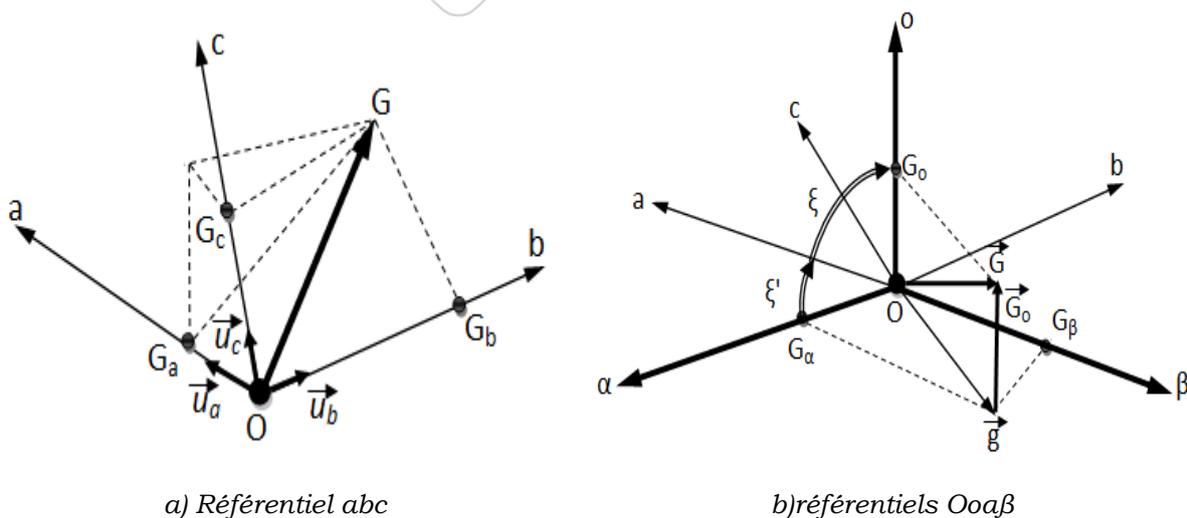


Figure 2.2 Représentation des référentiels abc et oαβ

L'axe homopolaire (Oo) forme avec les axes Oa, Ob et Oc un même angle (ζ) avec $\cos \zeta = 1/\sqrt{3}$. Ces axes forment avec le plan Oa β l'angle (ζ') avec $\cos \zeta' = \sqrt{2/3}$

La matrice de transformation de Concordia est traduite par $T_{33} = [T_{31} \quad T_{32}]$:

$$T_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Soit un vecteur \vec{G} quelconque, on tire ces composantes par l'application de la transformation inverse de Concordia (T_{33}^t) :

$$\begin{pmatrix} G_o \\ G_\alpha \\ G_\beta \end{pmatrix} = T_{33}^t \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{31}^t \\ T_{32}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Comme vous remarquerez sur la figure 2.2b, le vecteur \vec{G} se décompose en deux vecteurs $\vec{G} = \vec{G}_o + \vec{g}$ tel que: \vec{G}_o et \vec{g} : l'un est parallèle à l'axe homopolaire et l'autre appartient au plan Oa β .

En sens direct, l'application de la transformation triphasé-diphase T_{32}^t permet de tirer les composantes $\alpha\beta$ des composantes abc:

$$\begin{pmatrix} G_\alpha \\ G_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} = T_{32}^t \cdot \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

En sens inverse (diphase-triphasé), on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{pmatrix} = T_{32} \begin{pmatrix} G_\alpha \\ G_\beta \end{pmatrix} = T_{32} \cdot T_{32}^t \cdot \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Remarque: comme elle est normée, cette transformation conserve les grandeurs électriques composées par exemple: induction, densités de courant, puissance, couple, etc.

La figure 2.3 représente la machine diphasée équivalente dont les bobines sont décalées de 90° électriques:

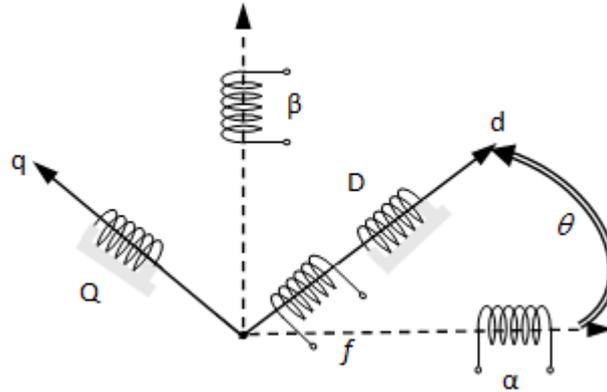


Figure 2.3. La machine diphasée équivalente

2.2.1 Inductances statoriques

La matrice d'inductances de la machine diphasé est:

$$[L_{ss2}] = \begin{bmatrix} L_\alpha & M_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} & L_\beta \end{bmatrix} = T_{32}^t \cdot [L_{ss3}] \cdot T_{32} \quad (2.14)$$

Dans les machine à pôles lisses, d'après l'équation (2.9) les inductance propres des bobines sont égales à:

$$L_3 = L_0 + M_{s0} = L_0 - 2 \cdot M \text{ avec } M = -\frac{M_{s0}}{2}$$

Les inductances diphasées sont égales aux inductances cycliques L_c :

$$L_\alpha = L_\beta = L_c = L_0 + \frac{3}{2} M_{s0} = L_3 - M \text{ avec } M = -\frac{M_{s0}}{2} \quad (2.15)$$

Remarque: si les mutuelles sont nulles: les enroulements α et β sont découplés

Dans les machines à rotor saillant, d'après (2.6) et (2.11) la matrice d'inductances équivalentes est:

$$[L_{ss2}] = \begin{bmatrix} L_\alpha & M_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} & L_\beta \end{bmatrix} = L_{02} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + M_2 \cdot P(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P(-\theta) \quad (2.16)$$

avec :

➤ **P** est **la matrice de rotation**:

$$P(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

- L'expression de la valeur moyenne L_{02} des inductances propres équivalentes incluant les fuites) est:

$$L_{02} = L_0 + \frac{3}{2} M_{s0} \quad (2.18)$$

- le coefficient M_2 dû à la saillance s'obtient de la partie variable L_{s2} de (2.6) :

$$M_2 = \frac{3}{2} L_{s2} \quad (2.19)$$

2.2.2 Mutuelles statoriques

Les coefficients de mutuelles M_{32} entre **phases de deux enroulements**, l'un triphase au stator et l'autre diphase (amortisseurs) ou monophasé (excitation) au rotor, donnent les coefficients diphasés M_{22} suivants:

$$M_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_{32} \quad (2.20)$$

D'après (2.8), les mutuelles inductances $M_{\alpha f}(\theta)$ et $M_{\alpha D}(\theta)$ sont:

$$M_{\alpha f} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_0 \cos \theta \text{ et } M_{\alpha D} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_{aD} \cos \theta \quad (2.21)$$

Remarque: il n'y a pas de modification des coefficients de mutuelle entre excitation et amortisseurs, puisqu'on n'a pas effectué de transformation.

2.2.3 Résistances

les résistances diphasées sont égales aux résistances triphasées. Cette définition conserve les pertes joules et les équations électriques.

2.2.4 Equations du modèle diphasé

Après l'application de la transformation de Concordia la partie active du système est réduite à l'ordre deux.

les équations des tensions deviennent:

$$\begin{aligned} u_0 &= R \cdot i_0 + L_0 \frac{d}{dt} i_0 \\ [u_{s2r}] &= [R_{s2r}] [i_{s2r}] + \frac{d}{dt} [\phi_{s2r}] \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{u}_{s2r}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_{s2}] \\ [\mathbf{u}_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_\alpha] \\ [\mathbf{u}_\beta] \\ [\mathbf{u}_f] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{i}_{s2r}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_{s2}] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_\alpha] \\ [\mathbf{i}_\beta] \\ [\mathbf{i}_f] \\ \mathbf{i}_D \\ \mathbf{i}_Q \end{bmatrix} \\
 [\phi_{s2r}] &= \begin{bmatrix} [\phi_{s2}] \\ [\phi_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi_\alpha] \\ [\phi_\beta] \\ [\phi_f] \\ \phi_D \\ \phi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{ss2}] & [L_{s2r}] \\ [L_{s2r}]^t & [L_{rr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_{s2}] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix}, \quad [R_{s2r}] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Où :

- $[L_{ss2}]$: est donnée pour les machines lisse ou saillant par (2.15) et (2.16) respectivement.
- $[L_{rr}]$: reste inchangée (relation (2.7))
- $[L_{s2r}]$: est donnée par (2.24), en prenant en compte les remarques du paragraphe 2.3.2:

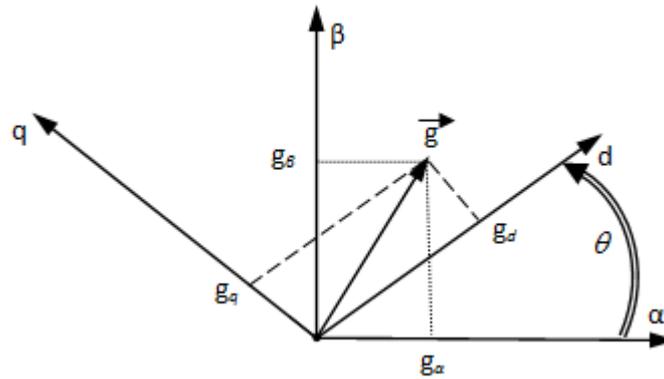
$$[L_{s2r}] = T_{32}^t \cdot [L_{s3r}] = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} M_0 \cos \theta & M_{aD} \cos \theta & -M_{aQ} \sin \theta \\ M_0 \sin \theta & M_{aD} \sin \theta & -M_{aQ} \cos \theta \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Les relations (2.22) à (2.24) sont toujours valables, même en présence d'un courant homopolaire.

Remarque: compte tenu des remarques précédentes nous nous limiterons dans la suite aux seuls composants diphasés a et β

2.3 Transformation de Park [1],[2], [3]:

La transformation de Park le résultat de deux transformations : Concordia (ou Clark) suivie d'une rotation. Le repère $\alpha\beta$ est toujours fixe par contre le repère dq est mobile. Ce dernier forme avec le repère fixe $\alpha\beta$ un angle qui est appelé l'angle de Park. Dans ce qui suit, **la transformation de Park** qui est caractérisée par une matrice $P(\alpha_s)$, est appliqué au modèle diphasé de Concordia. La figure 2.4 représente les deux composantes de Park **directe** et **en quadrature** notées g_d et g_q :

Figure 2.4. Représentation des référentiels $a\beta$ et dq

tel que:

$$\begin{pmatrix} g_d \\ g_q \end{pmatrix} = P(-\theta) \begin{pmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

On applique cette transformation seulement aux deux composantes du stator α et β , les grandeurs rotoriques n'ont pas à subir de rotation et reste inchangées.

Deux choix classiques de transformation sont possibles:

Le choix	*Lié à l'alimentation: une rotation d'un angle $\alpha_s = \omega t + \alpha_0$ ($\alpha_0 = \text{cst}$)	*Une rotation d'argument égal à la position électrique du rotor : $\alpha_s = \theta$
Inconvénients	*N'apporte aucune simplification aux machines saillantes. *Faire apparaître d'un argument variable dans les équations transitoires de rotation.	* La transformation de Park des tensions (ou des courants) de la source ne sont pas constantes en régime transitoire même si l'alimentation est sinusoïdale.

la représentation schématique des bobinages statoriques et rotoriques après transformation est illustrée sur la figure 2.5.

Remarque: Cela a deux conséquences importantes:

- Tous les coefficients d'inductances propres et mutuelles sont constants.
- Tous les coefficients de mutuelles propres entre un enroulement direct et un enroulement en quadrature sont nuls.

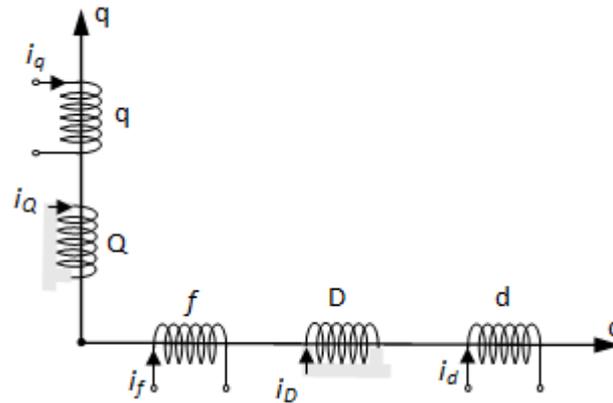


Figure 2.5. Représentation de la MS dans le repère de Park

Le modèle général maintenant est établi. La figure 2.6 en donne le schéma fonctionnel simplifié. Les équations électriques et l'expression de couple font l'objet du paragraphe suivant.

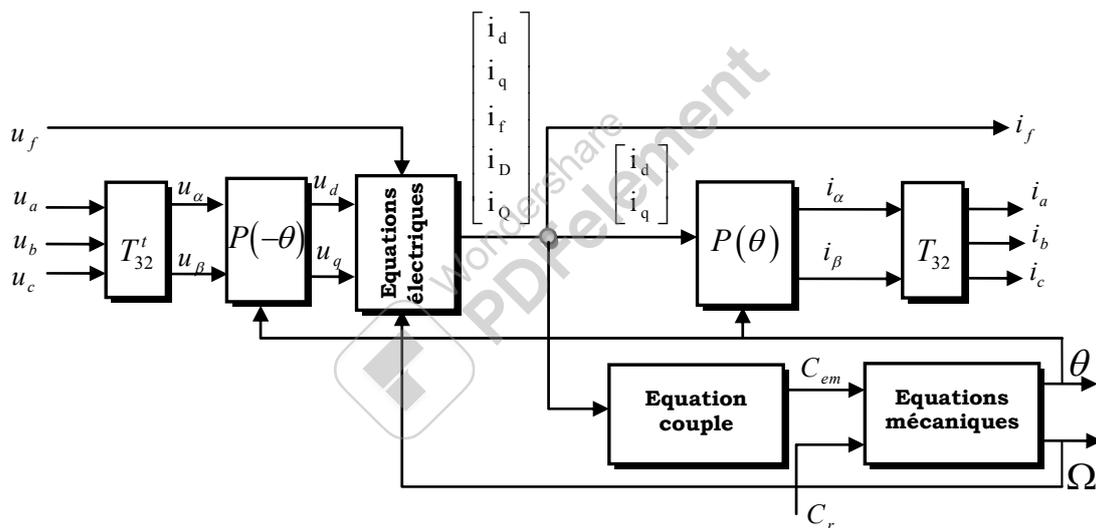


Figure 2.6. Schéma fonctionnel simplifié

2.4 Equations de Park des machines synchrones :

✚ Régime transitoire:

2.4.1 Machine lisse sans amortisseurs dans le repère de Park par la

rotation: $\alpha_s = \omega t + \alpha_0$

Ces équations sont souvent utilisées dans les machines à pôles lisses sans amortisseurs, elles sont compliquées et ne sont données ici qu'à titre documentaire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}'_s = \begin{bmatrix} R & -L_s \omega \\ L_s \omega & R \end{bmatrix} \mathbf{i}'_s + L_s \frac{d\mathbf{i}'_s}{dt} + M_{fd} \cdot p(\theta - \omega t - \alpha_0) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ p\Omega \mathbf{i}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{di_f}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{u}'_f = R_f \mathbf{i}_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \cdot [1 \quad 0] \cdot p(\theta - \omega t - \alpha_0) \left((\omega - p\Omega) \begin{bmatrix} -i_q \\ i_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{di_d}{dt} \\ \frac{di_q}{dt} \end{bmatrix} \right) \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Où:

$$\mathbf{u}'_s = \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = P(-\alpha_s) \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix}, \mathbf{i}'_s = \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = P(-\alpha_s) \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix}$$

2.4.2 Equations dans le repère de Park par la rotation : $\alpha_s = \theta$:

2.4.2.1 Expression générale des tension en fonction des flux:

On peut définir les flux direct et en quadrature par la transformation de Park $P(\theta)$ des flux diphasés comme suit;

$$\begin{pmatrix} \phi_d \\ \phi_q \\ \phi_f \\ \phi_D \\ \phi_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(-\theta) \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} \\ \phi_f \\ \phi_D \\ \phi_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{fd} & M_{Dd} & 0 \\ 0 & 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{fd} & 0 \\ M_{Dd} & 0 \\ 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{fD} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Où:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_d = L_0 + \frac{3}{2} \cdot (M_{s0} + L_{s2}) \\ L_q = L_0 + \frac{3}{2} \cdot (M_{s0} - L_{s2}) \\ M_{fd} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_0, M_{Dd} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_{aD}, M_{Qq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_{aQ} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

On note que ϕ_d ne dépend pas de i_q ni ϕ_q de i_d .

Les tensions s'écrivent alors en fonction des flux:

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [R_{s2r}] \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_d \\ \phi_q \\ \phi_f \\ \phi_D \\ \phi_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p\Omega \cdot \begin{bmatrix} -\phi_q \\ \phi_d \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

2.4.2.2 Puissances externes et couple:

La puissance absorbée par la machine est définie comme suit:

$$p(t) = \begin{bmatrix} i_d & i_q & i_f & i_D & i_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \\ u_D = 0 \\ u_Q = 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ce qui s'écrit, compte tenu de (2.28):

$$p(t) = \left[R(i_d^2 + i_q^2) + R_f i_f^2 + R_D i_D^2 + R_Q i_Q^2 \right] + \left[i_d \frac{d\phi_d}{dt} + i_q \frac{d\phi_q}{dt} + i_f \frac{d\phi_f}{dt} + i_D \frac{d\phi_D}{dt} + i_Q \frac{d\phi_Q}{dt} \right] + p\Omega(\phi_d i_q - \phi_q i_d) \quad (2.30)$$

Où les trois termes de la relation (2.30) sont respectivement:

Les pertes Joules, la variation d'énergie magnétique et la puissance mécanique. De dernier terme se traduit l'expression du couple:

$$C_{em} = p(\phi_d i_q - \phi_q i_d) \quad (2.31)$$

Donc, d'après (2.27):

$$C_{em} = p(L_d - L_q)i_d i_q + pM_{fd} i_f i_q + p \left[M_{Dd} i_D i_q - M_{Qq} i_Q i_d \right] \quad (2.31)$$

Cette expression du couple englobe trois termes qui sont dû respectivement:

- à la saillance rotorique, ne dépend que des courants statoriques, (nul dans les machines à rotor lisse).
- à l'interaction des courants statoriques et du courant d'excitation.
- à l'interaction des courants statoriques et des courants d'amortisseurs (type asynchrone).

Points importants [6]:

- ❖ **En régime stationnaire:**
- **Cas d'alimentation sinusoïdale à fréquence fixée** ce couple est nul.
- **Cas d'alimentation par onduleurs**, les harmoniques engendrés induisent des courants dans les amortisseurs, donc des couples qui ont une valeur moyenne nulle.

❖ **En régime transitoire (variation de charge, changement d'alimentation):**

- **La machine n'est pas commandée:** les amortisseurs sont nécessaires pour la stabilité
- **La machine est commandée (autopilotée):** amélioration de la réponse en courant et donc en couple et de la commutation des onduleurs de courant.

2.4.2.3 Equations générales des tensions en fonction des courants

- **Machine à pôles lisses:**

Les tensions statoriques et rotoriques s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_s \\ p\Omega L_s & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L_s \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{fd} & M_{Dd} & 0 \\ 0 & 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + p\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_{Qq} \\ M_{fd} & M_{Dd} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} + M_{fd} \frac{di_D}{dt} \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_D & 0 \\ 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_D & 0 \\ 0 & L_Q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + M_{Dd} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Dd} & 0 \\ 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Où: L_s est égale à l'inductance cyclique statorique (voir équation (2.15)).

Remarque: Dans les machines lisses, les circuits amortisseurs ont fréquemment une constitution différente: $R_D \neq R_Q, L_D \neq L_Q, M_{Qq} \neq M_{Dd}$

pour la machine sans amortisseurs, on annule les termes correspondants:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_s \\ p\Omega L_s & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L_s \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + M_{fd} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ 0 \end{bmatrix} + p\Omega M_{fd} \begin{bmatrix} 0 \\ i_f \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} \quad (2.36)$$

- **Machine à pôles saillants:**

Pour une machine a d'amortisseurs dissymétriques, les tensions s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_q \\ p\Omega L_d & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{fd} & M_{Dd} & 0 \\ 0 & 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + p\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_{Qq} \\ M_{fd} & M_{Dd} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} + M_{fD} \frac{di_D}{dt} \quad (2.38)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_D & 0 \\ 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_D & 0 \\ 0 & L_Q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + M_{fD} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Dd} & 0 \\ 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

En l'absence d'amortisseurs, ces équations deviennent:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_q \\ p\Omega L_d & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + M_{fd} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ 0 \end{bmatrix} + p\Omega M_{fd} \begin{bmatrix} 0 \\ i_f \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} \quad (2.41)$$

2.4.3 Equations du régime stationnaire:

Dans ce régime, les grandeurs transformées de Park demeurent notées **en minuscules** et les grandeurs symboliques (efficaces) sont **en majuscules**.

Les équations générales (2.37) à (2.39) font apparaître une solution stationnaire évidente dans laquelle:

- Les courants d'amortisseurs sont nuls: $i_D = i_Q = 0$
- Tous les autres courants et les tensions statoriques sont constants.
- La tension d'excitation égale à la chute ohmique: $u_f = R_f \cdot i_f$

2.4.3.1 Paramètres

Le tableau 2.1 définit les grandeurs et les paramètres en régime établi:

Tableau 2.1		
Type machine Paramètres	à pôles lisses	à pôles saillants
f.é.m.	$e = p\Omega \cdot M_{fd} \cdot i_f$	
Réactance synchrone	$X = L_s \cdot p\Omega$	$\begin{cases} X_d = L_d \cdot p\Omega \\ X_q = L_q \cdot p\Omega \end{cases}$
Impédance complexe	$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$	$\begin{cases} Z_d = R + jX_d = Z_d e^{j\zeta_d} \\ Z_q = R + jX_q = Z_q e^{j\zeta_q} \end{cases}$
Différence des réactances		$X_{dq} = X_d - X_q$

Tous ces paramètres dépendent de la vitesse mécanique: ceci est liée au choix de l'argument de la transformation de Park.

2.4.3.2 Définitions et Notations du régime stationnaire:

En régime stationnaire sinusoïdal, la charge est constante et l'alimentation, soit en courant, soit en tension est sinusoïdale et d'amplitude constante. On définit alors des couples de tensions et de courants sinusoïdaux diphasés:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} = U\sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \phi_v) \\ \sin(\omega t + \phi_v) \end{bmatrix} = U\sqrt{2}P(\omega t + \phi_v) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = I\sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \phi_i) \\ \sin(\omega t + \phi_i) \end{bmatrix} = I\sqrt{2}P(\omega t + \phi_i) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

avec:

U et I sont des valeurs efficaces des courants et des tensions équivalents

La figure 2.7 représente les grandeurs électriques dans un repère spatial au temps $t=0$, Où:

- θ_0 et $\theta'_0 = p\theta_0$: sont respectivement la position du rotor à l'instant origine, mesurée par rapport à l'axe de la première phase et l'angle électrique correspondant
- $\theta_0 = \theta'_0 - \phi_i$: angle entre l'axe du champ tournant et l'axe du rotor (angle de charge).
- $\phi = \phi_v - \phi_i$: le déphasage courant-tension.
- $\delta = \frac{\pi}{2} + \theta_0 - \phi$: le décalage interne.

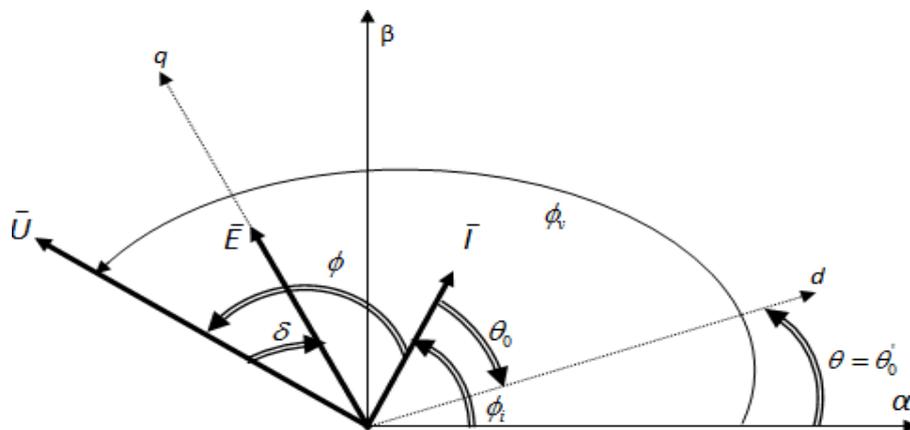


Figure 2.7. Angles et déphasage en régime permanent ($t=0$)

Les tensions du régime stationnaire s'écrivent avec les notations usuelles:

$$U'_2 = \frac{u'_2}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} U_d \\ U_q \end{bmatrix} = \frac{P(-\theta) \cdot u_2}{\sqrt{2}} = U \begin{bmatrix} \cos(\theta_0 - \phi) \\ -\sin(\theta_0 - \phi) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

et les courants:

$$I'_2 = \frac{I_2}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{P(-\theta) \cdot i_2}{\sqrt{2}} = I \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ -\sin \theta_0 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} \sin(\delta + \phi) \\ \cos(\delta + \phi) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

La f.é.m. est:

$$E = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{p\Omega \cdot M_{fd} \cdot i_f}{\sqrt{2}} \quad (2.46)$$

2.4.3.3 Machine à pôles lisses en régime stationnaire:

Le régime stationnaire se déduit de la relation (2.32) avec les notations précédentes:

$$U'_2 = \begin{bmatrix} U_d \\ U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -X \\ X & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Cette équations s'inversent pour donner les courants:

$$I'_2 = \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{1}{Z^2} \begin{bmatrix} R & X \\ -X & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d \\ U_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \sin \delta \\ U \cos \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \left(U \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \cos \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \right)$$

D'ou:

$$I'_2 = \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{1}{Z^2} \begin{bmatrix} U(R \sin \delta + X \cos \delta) - E \cdot X \\ U(R \cos \delta - X \sin \delta) - E \cdot X \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} U \sin(\delta + \xi) - E \sin \delta \\ U \cos(\delta + \xi) - E \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

La f.é.m. est donnée par l'équation (2.46).

Le couple à une expression similaire à celle des machines à courant continu:

$$C_{em} = p \cdot M_{fd} \cdot i_f \cdot i_q = 2 \frac{E \cdot I_q}{\Omega} \quad (2.49)$$

2.4.3.4 Machine à pôles saillants en régime stationnaire:

Le régime stationnaire se déduit des équations (2.37)-(2.39) et (2.31):

$$U'_2 = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_q \\ p\Omega L_d & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + p\Omega M_{fd} \begin{bmatrix} 0 \\ i_f \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$C_{em} = p(L_d - L_q) i_d i_q + p M_{fd} i_f i_q \quad (2.51)$$

Soit d'après la relation (2.45) :

$$C_{em} = -2p(L_d - L_q)I^2 \sin 2\theta_0 - pM_{fd}i_f I \sin \theta_0 \quad (2.52)$$

$$P = 2X_{dq} \cdot I_d \cdot I_q + 2E \cdot I_q \quad (2.53)$$

Avec les notations précédentes, les tensions de Park s'écrivent:

$$U_2' = \begin{bmatrix} U_d \\ U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -X_q \\ X_d & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Cette équation s'inverse pour donner les courants:

$$I_2' = \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{1}{Z^2} \begin{bmatrix} U(R \sin \delta + X_q \cos \delta) - E \cdot X_q \\ U(R \cos \delta - X_d \sin \delta) - E \cdot X_d \end{bmatrix} = \frac{1}{Z^2} \begin{bmatrix} Z_q [U \sin(\delta + \xi_q) - E \sin \delta_q] \\ Z_d [U \cos(\delta + \xi_d) - E \cos \delta_d] \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Où:

$$Z^2 = R^2 + X_d \cdot X_q \quad (2.55)$$

La f.é.m. résultante E' , toujours orientée suivant l'axe q est:

$$E' = E + (X_d - X_q) \cdot I_d \quad (2.56)$$

2.5 Analyse des modèles en régime stationnaire

Nous tenons ici certaines observations sur les performances lorsque l'on impose soit la tension, soit le f.é.m., soit le courant:

2.5.1 Performances sous tension imposée:

Lorsque la tension est fixée, par le convertisseur ou par le réseau, et lorsque la f.é.m. et le courant sont supposés variables sans limites:

- La puissance électrique théorique (en alternateur) est illimitée.
- La puissance mécanique théorique (en moteur) est limitée.

2.5.2 Performances sous Force électromotrice imposée:

Lorsque la f.é.m. est fixée, par l'opérateur ou par le structure, (comme les machines à aimants) et la tension variable :

- La puissance électrique théorique (en alternateur) est limitée.
- La puissance mécanique théorique (en moteur) est illimitée.

2.5.3 Performances sous courant imposé:

L'alimentation à courant fixe présente multiple avantages:

- Pertes Joules constantes: donc échauffement donné.
- Puissance interne et rendement maximaux au même point.
- Performances élevées, particulièrement en fonctionnement moteur.

Lorsque le courant est fixé, à tension ou f.é.m. libres:

- La puissance électrique théorique (en alternateur) et la puissance mécanique théorique (en moteur) sont les deux illimitées.

2.6 Modèle en vue de la commande ,[6], [7],[8], [9]:

Nous allons maintenant établir les équations et les modèles en vue de la commande, **particulièrement pour la machine synchrone à aimant permanent (MSAP)**, avec deux impératifs:

- Ces modèles doivent être les plus simples possibles pour les utiliser.
- Il ne doit y figurer que des paramètres mesurables.

2.6.1 Modèle d'état des machines à aimants

Remarque: Cette 'étude s'applique aussi aux machines à excitation bobinée alimentée à courant constant.

L'excitation par aimants peut être modélisée par une bobine excitatrice alimentée par une source de courant, donc il est constant et n'est plus une variable d'état et l'ordre de modèle général diminue.

Les flux des aimants à travers des circuits d'axe d (d et D) sont constantes ϕ_d et ϕ_D . Les expressions des flux totaux s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} \phi_d - \phi_{fd} \\ \phi_D - \phi_{fD} \\ \phi_q \\ \phi_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & M_{dD} & 0 & 0 \\ M_{Dd} & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_q & M_{qQ} \\ 0 & 0 & M_{qQ} & L_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} = [L] \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Où: [L] est la matrice d'inductance de machines à aimants munie d'amortisseurs.

Les équations de tension et les équations mécaniques s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} u_d \\ 0 \\ u_q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot i_d - p\Omega(L_q i_q + M_{Qq} i_Q) \\ R_D \cdot i_D \\ R \cdot i_q + p\Omega(L_d i_d + M_{Dd} i_D + \phi_{fd}) \\ R_Q \cdot i_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_d & M_{dD} & 0 & 0 \\ M_{Dd} & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_q & M_{Qq} \\ 0 & 0 & M_{qQ} & L_Q \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$\begin{cases} j \frac{d\Omega}{dt} = p \cdot \left[(L_d i_d + M_{Dd} i_D + \phi_{fd}) i_q - (L_q i_q + M_{Qq} i_Q) i_d \right] - C_r(\Omega, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = p \cdot \Omega \end{cases} \quad (2.59)$$

2.6.2 Modèle d'état des machines à aimants avec amortisseurs

Le modèle d'état avec amortisseur de la MSAP s'écrit comme suit:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} = [L]^{-1} \begin{pmatrix} -R & 0 & p\Omega L_q & p\Omega M_{Qq} \\ 0 & R_D & 0 & 0 \\ -p\Omega L_d & -p\Omega M_{Dd} & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} + [L]^{-1} \begin{pmatrix} u_d \\ 0 \\ u_q - p\Omega \phi_{fd} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_r(\Omega, \theta)}{j} \\ p\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_{em}}{j} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

le couple moteur s'écrit dans l'optique de la synthèse de la commande :

$$C_{em} = p \cdot \left[(L_d - L_q) i_d + \phi_{fd} \right] i_q \quad (2.62)$$

2.6.3 Modèle d'état des machines à aimants sans amortisseurs

les machines synchrones sont souvent alimentées par des onduleurs de tension et commandées à l'aide d'un capteur de position (**autopilotées**). Dans ces conditions, les amortisseurs ne sont plus utiles au maintien du synchronisme, et comme ils engendrent des pertes supplémentaires, ils deviennent même nuisibles: la plupart des machines synchrones à aimants ne comportent donc pas d'amortisseurs.

Leurs modèles se déduisent facilement des relations (2.57) à (2.59) en annulant les courants d'amortisseurs:

$$\begin{pmatrix} \phi_d - \phi_{fd} \\ \phi_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = [L] \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot i_d - p\Omega \cdot L_q \cdot i_q \\ R \cdot i_q + p\Omega(L_d i_d + \phi_{fd}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$\begin{cases} j \frac{d\Omega}{dt} = p \cdot [(L_d - L_q) i_d + \phi_{fd}] i_q - C_r(\Omega, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = p \cdot \Omega \end{cases} \quad (2.65)$$

Le modèle d'état se déduit des relations (2.64) et (2.65), pour simplifier, on y fait apparaître les constantes de temps $\tau_d = \frac{L_d}{R}$ et $\tau_q = \frac{L_q}{R}$.

Les variables de sortie du modèle (2.66) sont ses variables d'état.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ \Omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_d} \cdot i_d + p\Omega \frac{L_q}{L_d} \cdot i_q \\ -\frac{1}{\tau_q} \cdot i_q - p\Omega \left(\frac{L_d}{L_q} i_d + \frac{\phi_{fd}}{L_q} \right) \\ \frac{p}{j} \cdot [(L_d - L_q) i_d + \phi_{fd}] i_q - \frac{C_r(\Omega, \theta)}{j} \\ p\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u_d}{L_d} \\ \frac{u_q}{L_q} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Pour la synthèse de la commande des variables de sortie, en supposant encore la vitesse lentement variable, nous pouvons décomposer le système non linéaire (2.66) d'ordre quatre en deux sous systèmes électrique et mécanique d'ordre deux:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_d} & p\Omega \frac{L_q}{L_d} \\ -p\Omega \frac{L_d}{L_q} & -\frac{1}{\tau_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q - p\Omega \phi_{fd} \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_r(\Omega, \theta)}{j} \\ p\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_{em}}{j} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Comme précédemment, le sous système électrique est linéaire (Ω considérée constante) et le sous système mécanique non linéaire. leurs variables de sortie sont leurs variables d'états.

Pour les raisons indiquées plus haut, les courants atteignant rapidement leurs valeurs de référence, le couple moteur dans le sous système mécanique à pour valeur:

$$C_{em} = p \cdot [(L_d - L_q) i_{dref} + \phi_{fd}] i_{qref} \quad (2.62)$$

Remarque: pour une MSAP à rotor lisse, on pose $L_d = L_q$ et l'équation de couple devient: $C_{em} = p \cdot \phi_{fd} \cdot i_q$

2.8 Exercice d'application

On se limite dans cet exercice au cas d'une machine synchrone à aimants permanents (MSAP) :

1. Donner la représentation schématique de la machine synchrone à aimants permanents dans les repères triphasé (a, b, c) et diphasés ($d-q$).
2. Ecrire les équations régissant le fonctionnement du moteur (tensions, flux, couple électromagnétique, mécanique).
3. Déduire l'expression du couple pour la MSAP à rotor lisse.

Plusieurs façons sont possibles pour le choix du vecteur d'état. Cela dépendra de l'objectif tracé. Pour la MSAP alimentée en tension on choisit le vecteur d'état comme suit :

- Variables de commande: les tensions statoriques (u_d, u_q) et le flux permanent (Φ_{fd}).
- Variables d'état: les courants (i_d, i_q).

1. Ecrire les équations précédentes sous forme d'état dans le repère $d-q$
2. Tracer le schéma bloc de simulation sous Matlab/Simulink.

2.9 Bibliographie

- [1] B. Adkins , "General Theory of Electrical Machines", Chapman and Hall, Londres, 1957.
- [2] P. BARRET , " Régimes transitoires des machines tournantes" Eyrolles, Paris. 1982.
- [3] I. BOLDEA, S.A. NASAR, " Vector control of AC Drive", CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [4] J. BONAL, G. SEGUIER, " Entraînements électriques à vitesse variable", 3 volumes, Tec et Doc, Librairie Lavoisier, Paris 1998. 1999, 2000.
- [5] J. CHATELAIN, " Machines électriques, Traité d'électricité", vol. 10, EPFL, Presses Polytechniques Romandes ou Dunod, Lausanne, 1983.
- [6] P.C. KRAUSE, " Analysis of electrical Machinery", McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
- [7] J. LESENNE, F. NOTELET, G. SEGUIER, " Introduction à l'électrotechnique approfondie, Tec et Doc, Librairie Lavoisier, Paris, 1981.
- [8] W. LEONHARD, " Control of electrical Machines", Springer-Verlag, New York, 1990.
- [9] A. TOUNZI, F.M. TABAR, F.M. SARGOS, " Commande vectorielle de la machine à reluctance variable à rotor lisse. Prise en compte de la saturation et l'amortissement", Journal de la physique III, avril 1997.