- **التوزيع الأسي (Exponentielle Distribution):**

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...في العلوم الدقيقة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة (atomes radioactives) قبل أن تتفكك، حيث يعبر الوسيط عن اللحظة التي يبقى فيها نصف المجتمع الأصلي.

من الضروري فهم الآتي: كقاعدة عامة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط ثابت $1/\lambda$ وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم (vieillissement) أي أن مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T؛ أي لا تتأثر بالمدة التي دامتها

الظاهرة من قبل. مثلا قد نستبعد استخدام التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة آلة عاملة قبل تعطلها لأن احتمال تعطلها في لحظة ليس مستقلا عن المدة التي عملتها الآلة من قبل، كذلك الأمر بالنسبة لمدة حياة الإنسان.

نشير أخيرا إلى أن للتوزيع الأسي علاقة بالتوزيع بواسون، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع هذا التوزيع، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي؛ كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى مركز خدمة ما يتبع التوزيع بواسون فإن المدة الزمنية بين وصول زبون "أ" والزبون الموالي تتبع التوزيع الأسي. تتبين هذه العلاقة عند استنتاج صيغة القانون الأسي.

قاعدة: إذا كان حدث عشوائي ما يتكرر في الزمن وفق توزيع بواسون:

$$\boxed{p_{\tau}(x) = \frac{(\lambda\tau)^{x} e^{-\lambda\tau}}{x!}}$$

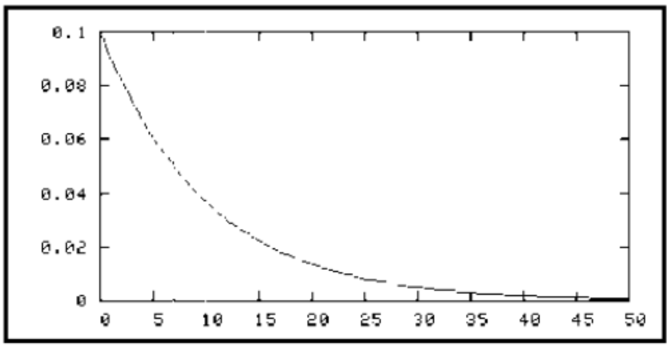
فإن الزمن T بين حادثين يتبع التوزيع التالي:

$$f(\tau)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda\tau} & , \quad \tau>0\\ 0 & , \quad \tau\le 0\end{cases}$$

حيث λ عدد حقيقي موجب.

و يسمى هذا التوزيع التوزيع الأسي ويسمى أيضا التوزيع الأسي السالب لعلاقته بتوزيع بواسون.

التمثيل البياني للتوزيع الأسي



خصائص التوزيع الأسي

$$\mu=1/\lambda \quad , \quad \sigma^2=1/\lambda^2 \quad , \quad Med=\mu\ln(2)<\mu \quad , \quad M_x(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}$$

- **توزيع قاما (Gamma Distribution):**
  - توزيع قاما وبيتا يمثلان مجموعة واسعة من التوزيعات ذات معلمتين تتميز بمرونة وقدرة على توليد توزيعات متعددة حسب قيم المعلمتين.
  - ندرس هذين التوزيعين أيضا لعلاقتهما بالتوزيعات: ستودنت **t**، مربع كاي وفيشر F.
  - يستخدم توزيع قاما لتمثيل بعض الظواهر مثل توزيع الدخل والادخار تحت شروط معينة.

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع قاما إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & x>0\\ 0 \quad , & x\le 0\end{cases} \quad , \alpha>0, \beta>0$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي الدالة قاما: $\alpha>0 \qquad \Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$

ونكتب $X \backsim \Gamma(\alpha,\beta)$

خصائص توزيع قاما:

$$\mu=\alpha\beta \quad , \quad \sigma^2=\alpha\beta^2, \quad M(t)=(1-\beta t)^{-\alpha}$$

Pour $\alpha>1$: $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ et si $\alpha\in N$: $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$,

$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

- **توزيع بيتا (Beta Distribution):**

يتميز توزيع بيتا (Beta) بمرونته الكبيرة تبعا لقيم معلمتيه، حيث يستخدم لحساب توزيع t^2، F، توزيع ذي الحدين وغيرها. ويستخدم لتمثيل بعض المتغيرات التي تتراوح بين 0 و 1 مثل نسبة التلف في منتوج ما.

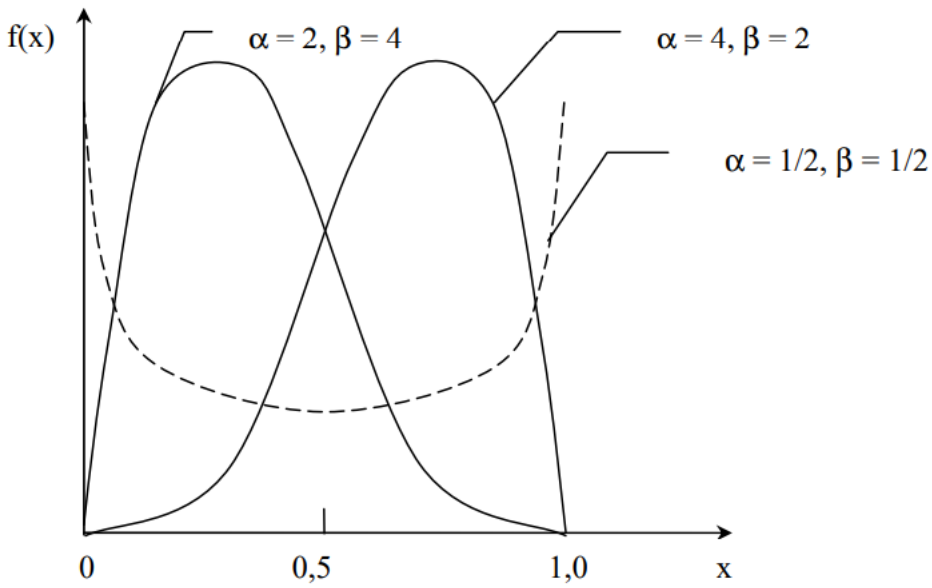
نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases} \quad (\alpha,\beta>0)}$$

حيث $B(\alpha,\beta)$ هي الدالة بيتا: $\alpha,\beta>0 \qquad B(\alpha,\beta)=\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du,$

ونكتب: $X \backsim B(\alpha,\beta)$ حيث $\beta=2$, $\alpha=4$

التمثيل البياني لدالة التوزيع بيتا من أجل قيم مختلفة:



خصائص دالة التوزيع بيتا:

$$\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

العلاقة بين الدالتين بيتا وقاما:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$