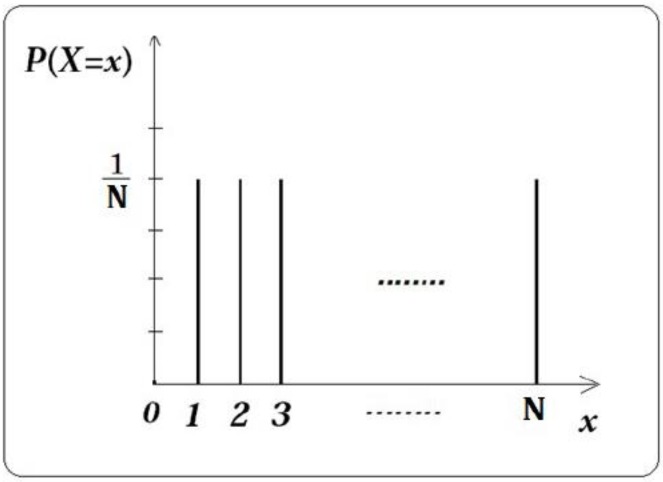
1-التوزيع المنتظم (Uniform Distribution):

يعتبر التوزيع المنتظم من أبسط التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، حيث يستخدم هذا التوزيع في التجارب التي تكون نتائجها لها نفس الفرصة في الظهور أو الحدوث. فمثلا عند رمي حجرة نرد مرة واحدة وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد النقاط التي تظهر على وجه حجرة النرد، فإن هذا المتغير العشوائي يتوزع وفق التوزيع المنتظم المتقطع (المنفصل).

بصفة عامة، إذا كان X متغير عشوائي متقطع بدالة احتمال معرفة بالشكل التالي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x = 1, 2, 3 \dots N \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

فإن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع المتقطع بمعلمة N. ويكون التمثيل البياني للتوزيع المنتظم كمايلي:



نظرية:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم المنفصل بمعلمة N فإنّ:

$$\mu_X = E(X) = \frac{N+1}{2} \qquad \text{التوقع الرياضي}$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = \frac{N^2 - 1}{12} \qquad \text{التباين}$$

$$m_x(t) = \frac{e^t(e^{Nt} - 1)}{N(e^t - 1)} \quad ; t > 0 \qquad \text{الدالة المولدة للعزوم}$$

البرهان:

$$\mathbf{E(X)} = \sum_{x=1}^{N} x.\frac{1}{N} = \frac{1}{N}.\sum_{x=1}^{N} x = \frac{1}{N}.\frac{N(N+1)}{2} = \frac{\mathbf{N+1}}{\mathbf{2}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E(X^2)} = \sum_{x=1}^{N} x^2.\frac{1}{N} = \frac{1}{N}.\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N}.\left[\frac{N(N+1)(2N-1)}{6}\right] = \frac{\mathbf{(N+1)(2N+1)}}{\mathbf{6}}$$

$$\mathbf{V(X)} = \mathbf{E}(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left[\frac{N+1}{2}\right]^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$
$$= \frac{\boldsymbol{N^2 - 1}}{\mathbf{12}}$$

$$\mathbf{m_x(t)} = \mathbf{E(e^{itx})} = \sum_{x=1}^{N} e^{itx}.\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} e^{itx}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} y^x \qquad ; y = e^{it}$$

$$= \frac{1}{N}[y + y^2 + \cdots + y^N]$$

$$= \frac{y}{N}[1 + y + \cdots + y^{N-1}]$$

وحيث أنّ المجموع داخل القوس يمثل حدود متتالية هندسية منتهية، أساسها y وأنّ مجموعها يساوي:

$$\sum_{x=0}^{N-1} y^x = \frac{1-y^N}{1-y}$$

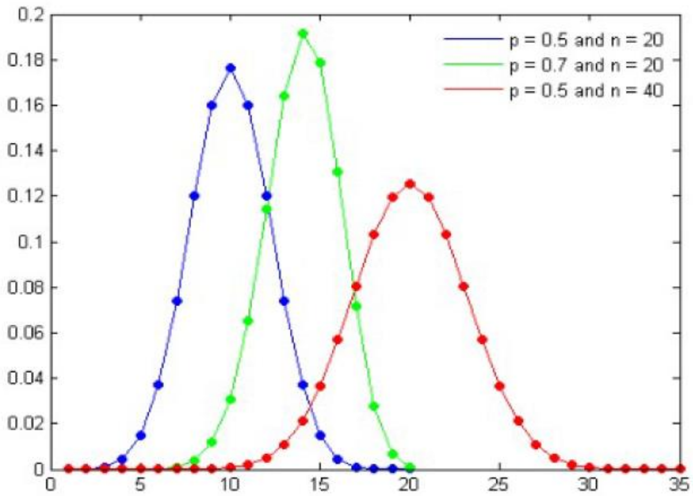
$$m_x(t) = \frac{y}{N}\left(\frac{1-y^N}{1-y}\right) = \frac{e^t(1-e^{Nt})}{N(1-e^t)} = \frac{e^t(e^{Nt}-1)}{N(e^t-1)} \qquad ; t > 0$$

2- توزيع ذي الحدين (Binomial Distribution):

تقوم فكرة هذا التوزيع على كيفية حساب الاحتمالات الخاصة بالتجارب التي تكون نتيجتها إما النجاح أو الفشل. فإذا قمنا بإجراء تجربة معينة وكانت نتيجتها هي النجاح أو وقوع الحادث المعين باحتمال قدره **P** أو الفشل أو عدم وقوع الحادث باحتمال **(1-P = q)**، فإن هذه التجربة تسمى بتجربة أو توزيع برنولي. وإذا قمنا بتكرار هذه التجربة **n** مرة فإننا نحصل على ما يعرف بتوزيع تجارب برنولي المتكررة أو توزيع ذي الحدين **(Binomial)**. وفي هذه الحالة إذا كان المتغير العشوائي **X** يمثل عدد مرات النجاح عند إجراء **n** مرة من التجارب فإن المتغير العشوائي **X** يأخذ القيمة **x**، حيث عدد مرات النجاح **x** تأخذ القيم **x = 1, 2, 3…, n** (أما عدد مرات الفشل فيأخذ القيم **(x-n)** باحتمال قدره **P(X = x)** حيث:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!} P^{x}(1-P)^{n-x} & ; x = 1, 2, 3 \ldots, n \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لتوزيع ذي الحدين عند قيم مختلفة بالشكل التالي:



ويظهر من الشكل مايلي:

- إذا كانت $p = q = \frac{1}{2}$ فإنّ التوزيع متماثل.
- إذا كانت $p < q$ فإنّ التوزيع ملتو إلى اليمين (التواء موجب).
- إذا كانت $p > q$ فإنّ التوزيع ملتو إلى اليسار (التواء سالب).

وتعتمد دالة الاحتمال لتوزيع ذي الحدين على معلمتين هما **n** و **P** ويرمز لها اختصارا بـ $X\sim b(n, P)$. ويمكن حساب القيمة المتوقعة والتباين وأيضا الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع بحيث:

القيمة المتوقعة $\boldsymbol{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{m_x} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{P}$

التباين $\boldsymbol{\sigma^2_x} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{P}.(\mathbf{1}-\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{npq}$

الدالة المولدة للعزوم $\boldsymbol{m_x(t) = (q+qe^t)^n}$

البرهان:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \sum_{x=0}^{n} x.P(X=x) = np\sum_{x=0}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}.p^{x-1}q^{n-x}$$

$$= np(p+q)^{n-1}$$

$$= \mathbf{np}$$

ومن تعريف التباين نجد:

$$\boldsymbol{\sigma^2_x = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

ويمكن كتابة $\boldsymbol{E(X^2)}$ على الشكل التالي:

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$$

ولكن:

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x.(x-1).C_n^x p^x q^{x-n}$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n} C_{n-2}^{x-2}p^{x-2}q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2$$

إذن:

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = n(n-1)p^2 + np$$

وبذلك يكون:

$$\boldsymbol{\sigma^2_x} = \boldsymbol{V(X)} = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = \boldsymbol{npq}$$

وأيضا من تعريف الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي منفصل نجد:

$$\mathbf{m_x(t) = E(e^{tx})} = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}.P(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_n^x (pe^t)^x q^{n-x} = \boldsymbol{(q + pe^t)^n}$$

وتجدر الإشارة إلى أن توزيع ذي الحدين له استخدامات عديدة في الحياة العملية مما يجعله من أكثر التوزيعات الإحصائية أهمية ومن أكثرها شيوعا، ومن هذه التجارب نجد على سبيل المثال نسبة البطالة في المجتمع، نسبة الأمية في المجتمع، نسبة الإنتاج المعيب في مصنع، نجاح أو فشل الطلبة في الامتحانات...الخ.

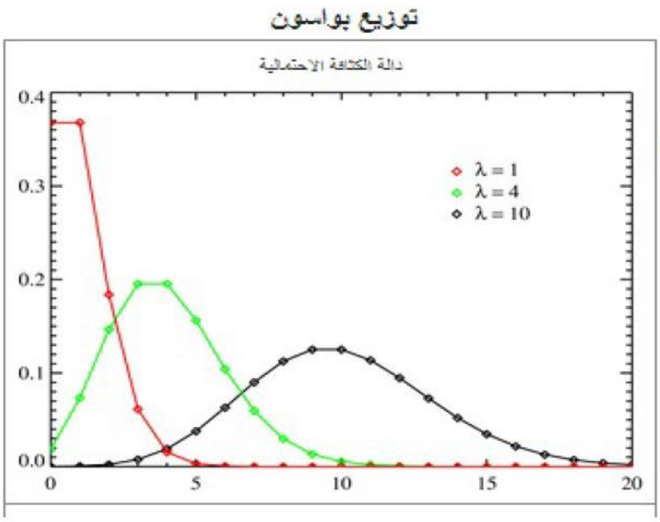
3- توزيع بواسون (Poisson Distribution):

نقول بأنّ للمتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون بالوسيط $\boldsymbol{\lambda}$ $(\lambda > 0)$ إذا كان لـ X دالة الاحتمال التالية:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x)} \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\lambda^x e^{-\lambda}}}{\mathbf{x!}} & ; \mathbf{x = 0, 1, 2} \ldots\ldots \\ \mathbf{0} & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

ويرمز اختصارا للمتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون بـ $\mathbf{X \sim \wp(\lambda)}$.

ويكون التمثيل البياني لتوزيع بواسون عند قيم مختلفة بالشكل التالي:



نظرية:

إذا كان المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع بواسون فإنّ التوقع الرياضي والتباين سوف يكون مساو إلى:

$$\mu_X = E(X) = \lambda$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = \lambda$$

البرهان:

من تعريف القيمة المتوقعة نجد:

$$\mathbf{E(X)} = \sum_{x=0}^{\infty} \lambda.\mathrm{P}(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{x.\lambda^x}{x(x-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda.\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!} \qquad ; y = (x-1)$$

$$= \boldsymbol{\lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}}$$

$$= \boldsymbol{\lambda}$$

أيضا:

$$\boldsymbol{E[X(X-1)]} = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{x}{x}\frac{(x-1)\lambda^2\lambda^{x=2}}{(x-1)(x-2)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^x\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x=2}}{(x-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{y!} = \boldsymbol{\lambda^2}$$

نقدم فيما يلي بعض الأمثلة التي يكون فيها المتغير العشوائي يتبع توزيع بواسون:

- العدد العشوائي للأشخاص الذين يصلون لمركز البريد خلال ساعة واحدة.
- العدد العشوائي للمكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز الشرطة في يوم واحد.
- العدد العشوائي للولادات التي تحصل في الأسبوع الأول من كل شهر في مستشفى معين.
- العدد العشوائي لحوادث المرور في مدينة ما خلال أسبوع.