Chapitre 1

Analyse Matricielle

1 Généralités

Définition 1. *Soit n et m deux entiers strictement positifs. La matrice A à n lignes et m colonnes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, est une application définie sur l'ensemble $\{1 \cdots n\} \times \{1 \cdots m\}$ à valeur dans $\mathbb{K}$, notée comme suit :*

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

ou $(a_{i,j})$ ou encore $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$

Les a_{ij} (également notés $(A)_{ij}$),$i = 1 \cdots n$, $j = 1 \cdots m$, sont dits coefficients ou éléments de la matrice A.
On note $M_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes dont les coefficients a_{ij} appartiennent à $\mathbb{K}$.
On appelle diagonale principale d'une matrice A de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des coefficients a_{ii} , $i = 1, \cdots , \min(m, n)$
Étant donné $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, on note $A^T \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice transposée de A tel que : $(A^T)_{ji} = (A)_{ij}$, $\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}$
De même, étant donné $A \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, on note $A^* \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ la matrice adjointe de A tel que $(A^*)_{ji} = (\overline{A})_{ij}$, $\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}$

.2 Opérations sur les matrices

Soient A , B et C matrices de $M_{n,m}(\mathbb{K})$, et $i = 1 \cdots n$,$j = 1 \cdots m$.

1. **Egalité entre matrice :** A est égale à B si $\forall i, \forall j, a_{ij} = b_{ij}$.
2. **Somme de matrices :** la matrice C est somme des matrices A et B , notée $A+B$, si ses coefficients sont $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. L'élément neutre pour la somme de matrices est la matrice nulle, notée $0_{n,m}$,
3. **Multiplication d'une matrice par un scalaire :** Soit λ un scalaire, la matrice C est le résultat de la multiplication de la matrice A par le scalaire λ, notée λA, si ses coefficients sont $c_{ij} = \lambda a_{ij}$
4. **Produit de matrices :** Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et B une matrice de $M_{p,m}(\mathbb{K})$). Le produit de A par B est la matrice C de $M_{n,m}(\mathbb{K})$, notée AB, dont les coefficients sont $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\ b_{kj}$, $i = 1 \cdots n$ et $j = 1 \cdots m$.
   Dans le cas de matrices carrées, on dit que :
   - deux matrices A et B commutent pour le produit si $AB = BA$
   - l'élément neutre pour le produit de matrices d'ordre n est la matrice carrée, appelée matrice identité , définie par $I = (\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ tel que
     $\delta_{ij}(\text{symbole de Kronecker}) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$

3 Espace vectoriel de matrices (supplément facultatif)

Muni des opérations d'addition et de multiplication par scalaire, l'ensemble des matrices $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

On appelle alors base canonique de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des $n \times m$ matrices $(E_{k,l}) \in M_{n,m}(\mathbb{K}), k = 1 \cdots n, l = 1 \cdots m$, dites unités matricielles dont les éléments sont définis par :

$$(E_{kl})_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq k\ ou \quad j \neq l \\ & \qquad\qquad 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m \\ 1 & si\ i = k\ et \quad j = l \end{cases}$$

A s'écrit dans sa base canonique comme suit $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij}(E_{kl\,i,j})$

4 Lien entre application linéaire et matrices (supplément facultatif)

Définition 2. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$, de dimensions respectivement égales à m et n . On appelle représentation matricielle de l'application linéaire f de l'ensemble des applications linéaires $\mathscr{L}(E,F)$, relativement aux bases $\{e_j\}_{j=1,\cdots,m}$ et $\{b_i\}_{i=1,\cdots,n}$, la matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ ayant pour coefficients les sclaiares $a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, définie de manière unique par la relation :*

$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i\ ,\ 1 \leq j \leq m$

On étend alors aux matrices toutes les définitions relatives aux applications linéaires

Définition 3. *Soit A une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
Le noyau de A est le sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ défini par : ker(A)=$\{x \in \mathbb{K}^m | Ax = 0\}$
L'image de A est le sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ définie par : Im(A)=$\{y \in \mathbb{K} | Ax = y\}$
Le rang de A est la dimension de cette image rang(A)=dim(Im(A)).

5 Inverse d'une matrice

Définition 4. *Soit A une matrice d'ordre n. On dit que A est inversible (non-singulière) s'il existe une matrice (unique), notée A^{-1} et appelée matrice inverse de A, tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*
Une matrice non inversible est dite singulière.

- Si une matrice est inversible, son inverse est aussi inversible et ${A^{-1}}^{-1} = A$.
- Une matrice A d'ordre n est inversible si et seulement si rang(A)=n
- Inverse de la transposée et de l'adjointe : $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
- Inverse du produit de matrice par un scalaire : $\forall(\alpha \in \mathbb{K}^*)(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.
- Si A et B deux matrices inversibles, on a l'égalité suivante :$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6 Trace d'une matrice

Définition 5. *La trace d'une matrice A d'ordre n , notée tr(A), est la somme de ses coefficients diagonaux,*
$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

On a par conséquent : $\forall(\alpha \in \mathbb{K}), \forall A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$,
$tr(\alpha A + B) = \alpha tr(A) + tr(B)$
et $tr(AB) = tr(BA)$

7 Déterminant d'une matrice

Définition 6. *On caractérise le déterminant d'une matrice par une application qui à une matrice carrée associe un scalaire noté* $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

Propriétés du déterminant

$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$

1. $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$,
2. si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
3. $\det(A^T) = \det(A)$
4. $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$
5. $\det{(\alpha A)}^n = \alpha^n \det A$

6. $\det I^n = 1$
7. si deux colonnes sont identiques sur A ,$\det A = 0$
8. si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes alors $\det A = 0$

Calcul du déterminant d'une matrice

Parmi les méthodes de calcul du déterminant, celle de Leibniz et celle de Laplace (dite de développement sur une ligne ou une colonne).

Définition 7. *Soit A une matrice d'ordre n. On appelle mineur associé à l'élément a_{ij} de A ($1 \leq i, j \leq n$), le déterminant d'ordre n-1 de la matrice obtenue par suppression de la i^e et de la j^e colonne de A.*

On appelle cofacteur associé à ce même élément le scalaire $Cof_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Enfin, on appelle matrice des cofacteurs ou comatrice de A, la matrice d'ordre n constituée de l'ensemble des cofacteurs de A, $com(A) = cof_{ij}(A)_{1 \leq i,j \leq n}$

Ces définitions ramènent le calcul du déterminant d'ordre n de A par développement sur une ligne ou sur une colonne, au calcul récursive de n déterminants d'ordre n-1 et ainsi de suite : $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2, det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} Cof_{ik}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} Cof_{kj}(A)$

Calcul de l'inverse d'une matrice

Lorsque la matrice A est inversible, son inverse est donné par : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(com(A))^T$.

8 Quelques matrices particulières

Matrice diagonale Une matrice A d'ordre n est dite diagonale si on a $a_{ij} = 0, \forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$ tels que $i \neq j$.
La somme et le produit de deux matrices diagonales sont des matrices diagonales. Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses éléments diagonaux. Une matrice diagonale A est donc inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont tous non nuls, son inverse est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux correspondants de A.

Matrice triangulaire On dit qu'une matrice A d'ordre n est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si :
$a_{ij} = 0 \forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$ tel que $i > j (resp. i < j)$.
Soit A une matrice d'ordre n triangulaire supérieure (resp. inférieure). Son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux et elle est donc inversible si et seulement si ces derniers sont tous non nuls. Dans ce cas, son inverse est aussi une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de A.
Soit B une autre matrice d'ordre n triangulaire supérieure (resp. inférieure). La somme A+ B et le produit AB sont des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) dont les éléments diagonaux sont respectivement la somme et le produit des éléments diagonaux correspondants de A et B.

Matrice à diagonale dominante : On dit qu'une matrice A d'ordre n est à diagonale dominante par lignes (respectivement par colonnes) si $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| (resp \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|)$
Une matrice A d'ordre n à diagonale strictement dominante (par lignes ou par colonnes) est inversible.