**المحور 01: عموميات حول السلاسل الزمنية وتقدير مركباتها**

**المحاضرة 02**

## 6- طرق الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية:

**6-1- طرق الكشف عن مركبة الاتجاه العام:** توجد العديد من الطرق للكشف عن وجود مركبة الاتجاه العام من عدمها، إلاّ أننا سوف نكتفي بالاختبارات الأكثر شيوعا واستعمالا وهما:

- ✓ **اختبار الإشارات:** يقوم هذا الاختبار على حساب الفروقات من الدرجة الأولى، أي حساب $\Delta \boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{X_t} - \boldsymbol{X_{t-1}}$ ثم حساب S الذي يمثل عدد الفروق الموجبة. ويخضع هذا الاختبار للتوزيع الطبيعي إذا كان عدد المشاهدات أكبر من 12 مشاهدة.

$$S \rightsquigarrow N(E(S), V(S))$$

$$E(S) = \frac{n-1}{2} \quad , \quad V(S) = \frac{n+1}{2}$$

شكل الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \text{لا يوجد اتجاه عام (السلسلة عشوائية)} \\ H_1 : \text{يوجد اتجاه عام} \end{cases}$$

مبدأ الاختبار: نقوم بحساب $Z = \frac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}$

القرار: نرفض $H_0$ إذا كان $Z > 1,96$، أي يوجد اتجاه عام.

- ✓ **اختبار دانيال (معامل الارتباط الرتبي (Spearman)):** يستلزم هذا الاختبار اتباع الخطوات التالية:

**1**−وضع رتب لقيم السلسلة $R_t$ من أصغر قيمة لأكبر قيمة.

**2**−حساب معامل الارتباط الرتبي بين عنصر الزمن (t) ورتب قيم السلسلة الزمنية $R_t$

$$\boldsymbol{r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}}$$

حيث:

$$\boldsymbol{d = t - R_t}$$

**3**−نقارن بين القيمة المحسوبة لمعامل الارتباط الرتبي والقيمة المجدولة لنفس المعامل، فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من الجدولية فإن السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة الاتجاه العام بالإضافة إلى المركبة العشوائية، وإذا كانت أقل من القيمة الجدولية فإنّ هذا يدل على عدم وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية.

ملاحظة: لتطبيق هذا الاختبار لا بد أن نفرق بين حالتين:

أ- حالة العينات الصغيرة $n \leq 30$، إذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من الجدولية فإن السلسلة تحتوي على مركبة الاتجاه العام $|r| \geq r\alpha_{/2}$. وغير ذلك فإن السلسلة لا تحتوي على مركبة الاتجاه العام.

ب- حالة العينات الكبيرة $n > 30$، حيث أنّ $|t| > t\alpha_{/2}$، في هذه الحالة السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة اتجاه عام، علما أنّ $t = \frac{r-\mu_r}{\sigma_r}$، وفي حالة $\mu_r = 0$ فإنّ: $t = \frac{r}{\sigma_r} = r\sqrt{n-1}$. لأنّ: $\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

مثال: الجدول التالي يمثل تفضيلات زبائن إحدى المؤسسات وفقا لدرجات متفاوتة لمنتوجين مختلفين من منتوجاتها.

| **الزبون** | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **المنتوج 1** | سيء | رديء | حسن | جيد جدا | جيد | قريب من الحسن | متوسط | دون الوسط | ممتاز | مقبول |
| **المنتوج 2** | حسن | مقبول | جيد | ممتاز | جيد جدا | متوسط | سيء | قريب من الحسن | دون الوسط | رديء |

من أجل حساب معامل ارتباط الرتب نقوم بإعطاء قيم عددية لرتب التفضيلات كما في الخانة الأولى من الجدول التالي:

| | المنتوج 1 | المنتوج 2 | $d$ | $d^2$ |
|---|---|---|---|---|
| **1- سيء** | 1 | 7 | 6 | 36 |
| **2- رديء** | 2 | 5 | 3 | 9 |
| **3- دون الوسط** | 7 | 8 | 1 | 1 |
| **4- متوسط** | 9 | 10 | 1 | 1 |
| **5- مقبول** | 8 | 9 | 1 | 1 |
| **6- قريب من الحسن** | 6 | 4 | 2 | 4 |
| **7- حسن** | 4 | 1 | 3 | 9 |
| **8- جيد** | 3 | 6 | 3 | 9 |
| **9- جيد جدا** | 10 | 3 | 7 | 49 |
| **10- ممتاز** | 5 | 2 | 3 | 9 |
| | | | | **128** |

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{6}\sum \boldsymbol{d}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1})} = 1 - \frac{6(128)}{10(10^2 - 1)} = \mathbf{0.224}$$

إذن معامل ارتباط رتب تفضيلات المنتوج الأول مع رتب تفضيلات المنتوج الثاني هو 0.224

وبالرجوع إلى قيم $r$ الجدولية لسبيرمان عند درجة حرية $9$ نجد: $r_t = 0.632$. وبمقارنة القيمة المحسوبة مع الجدولية نجد أنّ القيمة المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية. وحيث أنّ حجم العينة صغير (أقل من 30 مشاهدة) فإنه يمكننا الحكم على أنّ السلسلة تحتوي على مركبة اتجاه عام.

3- **اختبار الجذور الأحادية (*Dicky– Fuller*):** يمكننا هذا الاختبار من الكشف عن مركبة الاتجاه العام، ويسمح لنا بالتعرف على الطريقة المثلى والجيدة لاستقرار السلسلة (TS)Trend Stattionary أو Differency Stationary (DS)، ويعتمد هذا الاختبار على ثلاثة نماذج، هي:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(النموذج 1)}$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + c + \varepsilon_t \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(النموذج 2)}$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + bt + c + \varepsilon_t \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(النموذج 3)}$$

حيث: $c$: ثابت.

$b$:معامل مركبة الاتجاه العام.

وفرضية هذا الاختبار هي:

$$\begin{cases} H_0 : \phi_1 = 0 \\ H_1 : |\phi_1| < 1 \end{cases}$$

إذا كانت الفرضية $H_0$ محققة في إحدى النماذج السابقة فإن السياق ليس مستقر (عشوائي)، لذلك نستعمل اختبارات القيمة $(\phi_1 - 1)$ بدلا من $\phi_1$، وبالتعويض في المعادلات نستعمل $\Delta X_t$ بدلا من $X_t$ أي $(X_t - X_{t-1})$ فتصبح النماذج كالتالي:

**النموذج (1):**

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1) X_{t-1} + \varepsilon_t$$

**النموذج (2):**

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1) X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

**النموذج (3)** :

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} + c + bt + \varepsilon_t$$

فتصبح الفرضية:

$$H_0 : \phi_1 - 1 = 0$$

ونقوم بالاختبار على النحو التالي:

-حساب $\hat{\phi}_1$ القيمة التقديرية لـ $\phi_1$ وذلك باستعمال طريقة المربعات الصغرى $(MCO)$ للنموذج (1)، (2) و(3).

-حساب $t_c$ وذلك بإحدى الطريقتين : $t_c = n(\hat{\phi}_1 - 1)$ أو $t_c = \dfrac{\hat{\phi}_1 - 1}{\delta \hat{\phi}_1}$

ثم نقارن $t_c$ و $t_t$ فإذا كانت : $t_t < t_c$

نقبل الفرضية $H_0$ ، يوجد جذر أحادي والسياق غير مستقر، والعكس صحيح.

4- **اختبار ديكي فولر المطور (ADF):** يعني هذا الاختبار أن اختبار ديكي فولر البسيط تتطور وتتوسع لتصبح على الشكل:

**النموذج (4)**:

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta X_{t-j+1} + \varepsilon_t$$

**النموذج (5)**:

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta X_{t-j+1} + C + \varepsilon_t$$

**النموذج (6)**:

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta X_{t-j+1} + C + bt + \varepsilon_t$$

**ملاحظة** :إن اختبارات ديكي -فولار لا تعمل فقط على كشف مركبة الاتجاه العام كما سبقت الاشارة إليه، ولكنها تعمل على تحديد الطريقة المناسبة لجعل السلسلة الزمنية تستقر، ومن أجل ذلك نميز بين نوعين من النماذج :

• **السياق من نوع $(DS)$ :** (*Differency Stationary*): هذا السياق غير مستقر ويبرز عدم إستقرارية عشوائية "*Stochastique*"،و نقول عن السلسلة الزمنية (غير مستقرة) $X_t$ أنها سلسلة زمنية عشوائية من نوع $DS$ من الدرجة $d$ إذا تطلب الأمر إجراء فروقات من الدرجة الأولى $d$ مرة لجعل السلسلة الزمنية مستقرة، في هذه الحالة نقول عن السلسلة الناتجة عن هذه العملية أنها متكاملة من الدرجة $d$ و نرمز لها بـ: $I(d)$ وتأخذ الشكل:

$$X_t = X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

ويمكن كتابتها كما يلي:

$$(1-B)^d X_t = c + \varepsilon_t$$

حيث: $c$ ثابت حقيقي، $B$ معامل التأخر، $d$ درجة الفروقات.

وفي الغالب نستعمل الفروقات من الدرجة الأولى في هذا السياق أي $(d=1)$ ونكتب:

$$(1-B)X_t = c + \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

ويأخذ هذا السياق شكلين:

-إذا كان $c = 0$ يسمى هذا السياق "$DS$" بدون ثابت، ويكتب:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

-إذا كانت $c \neq 0$ يسمي السياق "$DS$" بوجود ثابت، ونكتب:

$$X_t = X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

ويمكن القول أن السلاسل الزمنية من نوع $DS$ من الدرجة $d$ أنها تلك السلاسل الزمنية التي يقبل كثير الحدود المعطى بدلالة معامل التأخير المرافق لمركبة الإنحدار الذاتي $d$ جذر أحادي .

• **السياق من النوع $(TS)$ :** (*Trend Stationary*): هذا السياق أيضا غير مستقر ويبرز عدم إستقرارية تحديدية (*Déterministe*) وتأخذ الشكل:

$$X_t = f_t + \varepsilon_t$$

حيث $f_t$ دالة كثير حدود للزمن (خطية أو غير خطية) و $\varepsilon_t$ صدمات عشوائية.

يظهر جليا أن السلسلة الزمنية $X_t$ لا ينطبق عليها تعريف الإستقرارية من الدرجة الثانية، إذ أنه يمكن بسهولة إثبات أن التوقع الرياضي للمتغيرة $X_t$ هو دالة للزمن.

وأغلب هذا السياق انتشارا يأخذ شكل كثير حدود ذي الدرجة الأولى ويكتب من الشكل:

$$X_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

هذا السياق غير مستقر لأن متوسطه $E(X_t)$ متعلق بالزمن، لكننا نستطيع جعله مستقرا بتقدير المعالم $a_0, a_1$ ، بطريقة المربعات الصغرى $MCO$.

من بين الخصائص الهامة التي تميز هذا النوع من السلاسل هو عدم إستقرارية أثر الصدمات العشوائية مع مرور الزمن، إذ أن أثر الصدمة يكون عابر ومؤقت .

**ملاحظة:** قبل البدء في اختبارات ديكي فولار لابد من تحديد درجة التأخير، لأنه من خلالها يتم تحديد الاختبار الذي يجب تطبيقه (البسيط أو المطور)، ولتحقيق هذا الغرض يمكننا الإستعانة ببعض الأدوات الإحصائية مثل: معايير المعلومات (*Schwarz or Akaike*)، أو استخدام إحصائيّتي *Box-Pierce* أو *ljung-Box* ، لاختبار الارتباط الذّاتي بعد كل تأخير مُضاف، حيث نتوقف عند أول تأخير نقبل من أجله الفرضية الصِّفرية التي تفترض غياب الارتباط الذاتي للأخطاء.

### 6-2- طرق الكشف عن المركبة الفصلية: