العزوم والدالة المتجددة للعزوم

(Moments and Moment Generating Function)

بعد التعرف على المتغيرات العشوائية المستمرة نحاول في هذه المحاضرة دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة وكيفية تطبيقها. على هذا الأساس سوف نتناول:

- العزم المركزي؛
- العزم المرتبط بالأصل؛
- الدالة المولدة للعزوم.

1. العزوم : هنا نميز بين العزوم المركزية والعزوم حول الأصل.

1.1. العزم المركزي (Central Moment): يعرف العزم المركزي من الدرجة r للمتغير العشوائي X حول المتوسط الحسابي μ بأنه القيمة المتوقعة للقوة r لفروقات القيم عن متوسطها الحسابي. ومنه فإن العزم من الرتبة r لمتغير عشوائي يعرف كما يلي:

$$M_r = E\left[(X-\mu)^r\right] \quad ; r = 0,1,2,........$$

$$M_0 = E\left[(X-\mu)^0\right] = E(1) = 1.............\rightarrow M_0 = 1$$

$$M_1 = E\left[(X-\mu)^1\right] = E(X) - E(\mu) = 0 \rightarrow M_1 = 0$$

$$M_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = V(X)................\rightarrow M_2 = \sigma_X^2$$

كما درسنا سابقا المتغيرات العشوائية هي متغيرات عشوائية متقطعة ومتغيرات عشوائية مستمرة، على هذا الأساس يحسب العزم المركزي حسب طبيعة المتغير العشوائي سواء متقطع او مستمر.

العزم المركزي في حالة المتغير العشوائي المتقطع	العزم المركزي في حالة المتغير العشوائي المستمر
$M_r = \sum_i (x_i-\mu)^r f(x)$	$M_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)dx$

مثال 1: ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية كما يلي:

$$P(X=x_i) = \begin{cases} 3/4; x=1 \\ 1/4; x=2 \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$$

- أحسب التوقع الرياضي؛
- أحسب العزم المركزي من الدرجة 3.

الحل:

التوقع الرياضي E(X)= μ

$$E(X) = \sum x_i p(X=x_i)$$

$$E(X) = (\frac{3}{4}\times 1) + (\frac{1}{4}\times 2)$$

$$E(X) = \mu = \frac{5}{4}$$

العزم المركزي من الدرجة 3

$$M_3 = E\left[(X-\mu)^3\right]$$

$$M_3 = \sum (X-\frac{5}{4})^3 \times P(X=x_i)$$

$$M_3 = [(1-\frac{5}{4})^3 \cdot \frac{3}{4}] + [(2-\frac{5}{4})^3 \cdot \frac{1}{4}]$$

$$M_3 = [(-\frac{1}{4})^3 \cdot \frac{3}{4}] + [(\frac{3}{4})^3 \cdot \frac{1}{4}]$$

$$M_3 = -\frac{3}{4^4} + \frac{27}{4^4} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$$

2.1. العزم المرتبط بالأصل(Moment): يعرف بالعزم حول نقطة الأصل (X=0)، فهو إذن القيمة المتوقعة للقوة r لتلك القيم xi.

يرمز له بالرمز M'_r حيث:

$$M'_r = E(X^r) \quad ; r = 0,1,2,.........$$
$$M'_0 = E(X^0) = E(1) = 1$$
$$M'_1 = E(X^1) = E(X) = \mu$$
$$M'_2 = E(X^2)$$

على هذا الأساس يتم حسابه بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع والمستمر كما يلي:

العزم المرتبط بالأصل في حالة المتغير العشوائي المتقطع	العزم المرتبط بالأصل في حالة المتغير العشوائي المستمر
$M'_r = E(X^r) = \sum_i x_i^{\ r} f(x)$	$M'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$

مثال 2:

- أحسب العزم من الدرجة 3.

$$P(X = x_i) = \begin{cases} 1/2; x = 1 \\ 1/3; x = 2 \\ 1/6; x = 3 \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$$

الحل:

العزم المرتبط بالأصل من الدرجة 3

$$M'_3 = E\left[(X)^3\right] = \sum x^3{}_i P(X = x_i)$$
$$M'_3 = [1^3 \cdot \frac{1}{2}] + [2^3 \cdot \frac{1}{3}] + [3^3 \cdot \frac{1}{6}]$$
$$M'_3 = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + \frac{27}{6} = \frac{3+16+27}{6} = \frac{46}{6}$$
$$M'_3 = \frac{23}{3}$$

2. الدالة المولدة للعزوم (Moment Generating Function)

تعرف الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي X، بأنها القيمة المتوقعة للدالة الأسية لمضاعفات المتغير X ويرمز لها بالرمز $m_X(t)$.

إذن تعرف الدالة المولدة للعزوم بالعلاقة التالية: $m(t) = E[\exp^{(tX)}] = E[e^{tX}]$

1.2. الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي متقطع:

إذا كان X متغير عشوائي متقطع له دالة كثافة احتمالية f(x) فإنه يمكن حساب الدالة المولدة للعزوم كما يلي:

$$m(t) = E[e^{tX}] = \sum e^{tX} f(x)$$

مثال3: إذا كان X متغير عشوائي حيث $X \sim B(1,P)$ ، أوجد الدالة المولدة لعزوم المتغير X.

بما أن X متغير عشوائي دو توزيع برنولي فإن:	الدالة المولدة للعزوم
$X \sim B(1,P) \Rightarrow X = \{0,1\}$ $P(X = x_i) = \begin{cases} p; x = 1 \\ q; x = 0 \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$	$m(t) = E[e^{tX}] = \sum e^{tX} P(X = x_i)$ $m(t) = e^{tX} p(X = 0) + e^{tX} p(X = 1)$ $m(t) = e^{t \cdot 0} q + e^{t \cdot 1} p$ $m(t) = q + p \cdot e^{t}$

2.2. الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي مستمر:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية f(x) فإنه يمكن حساب الدالة المولدة للعزوم كما يلي:

$$m(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} f(x) dx$$

مثال 4: X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية f(x)،

أوجد الدالة المولدة للعزوم لهذا المتغير.	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x; 0 < x < 2 \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$

الحل:

$$m_x(t) = E[e^{tX}] = \int_0^2 e^{tX} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x e^{tX} dx$$

نلاحظ أن هذا التكامل هو تكامل بالتجزئة من الشكل:

$$\int_a^b U dV = [UV]_a^b - \int_a^b V dU = \frac{1}{2} \int_0^2 x e^{tX} dx$$

$$m_x(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{X e^{tx}}{t} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{tx}}{t} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{X e^{tx}}{t} \right]_0^2 - \frac{1}{t} \int_0^2 e^{tx} dx$$

$$m_x(t) = \frac{1}{2} \left[\left[\frac{2e^{2t}}{t} \right]_0^2 - \frac{1}{t} \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_0^2 \right] = \frac{e^{2t}}{t} - \frac{e^{2t}}{2t^2}$$

ملاحظة: عملية التكامل بالتجزئة تكون بالطريقة التالية:

$$\begin{cases} U = X \\ dV = e^{tx} \end{cases} \qquad \begin{cases} dU = 1 \\ V = \dfrac{e^{tx}}{t} \end{cases}$$

3. اشتقاق العزوم من الدالة المولدة للعزوم

الدالة المولدة للعزوم M(t) هي عبارة عن دالة تضم كافة العزوم حول نقطة الأصل ولهذا سميت بالدالة المولدة حيث يمكن من خلالها استخلاص أو إيجاد أي عزم من العزوم من خلال تكرار عملية الاشتقاق للدالة المولدة.

إذا كانت الدالة المولدة للعزوم M(t) لمتغير عشوائي موجودة فإن:

$$\left.\frac{d^k M(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = M'_k$$

- إذا أخذنا المشتق الأول نحصل على العزم الأول وتصبح العلاقة أعلاه: $M'_1 = \left.\frac{d^1 M(t)}{dt^1}\right|_{t=0}$.
- إذا أخذنا المشتق الثانية نحصل على العزم الثاني وتصبح العلاقة أعلاه: $M'_2 = \left.\frac{d^2 M(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$.
- وعند أخذ المشتقة من الرتبة K نحصل على العزم من الرتبة K؛ أي: $M'_k = \left.\frac{d^k M(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$.

مثال: X متغير عشوائي دالته المولدة للعزوم معرفة كما يلي: $M_X(t) = \frac{1}{2}(1+e^t)$.

- ✓ أوجد العزم من الدرجة الأولى والثانية؛
- ✓ أوجد تباين هذا المتغير.

الحل:

- ✓ إيجاد العزوم:

العزم الثاني	العزم الأول
$M'_2 = \left.\frac{d^2 M_X(t)}{d^2 t}\right\|_{t=0} = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$	$M'_1 = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right\|_{t=0} = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$

- ✓ إيجاد التباين: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

حساب $E(X^2)$	حساب E(X)
$E(X^2) = M'_2 = \left.\frac{d^2 M_X(t)}{d^2 t}\right\|_{t=0} = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$	$E(X) = M'_1 = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right\|_{t=0} = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

مثال: أوجد الدالة المولدة للعزوم لتوزيع بواسون:

$X \sim Poisson(\lambda)$ $M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$ $M(t) = E(e^{tx}) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{e^{tx}\lambda^{x}}{x!}$ $M(t) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{(e^{t}\lambda)^{x}}{x!}$ $\left\| \begin{array}{l} \to e^{x} = \sum_{x=0}^{n} \frac{x^{n}}{n!} \\ \to e^{e^{t}\lambda} = \sum_{x=0}^{n} \frac{(e^{t}\lambda)^{x}}{x!} \end{array} \right.$ $M(t) = e^{-\lambda} e^{e^{t}\lambda}$ $M(t) = e^{-\lambda(1-e^{t})}$	$X \sim Poisson(\lambda)$ $f(x) = \left\{ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; x = 0,1,2,3.........n \right\}$ $E(x) = V(x) = \lambda$