Série d'éxercices NÂ°3

Exercice 1 *Soit* (X_t) *le processus donné par*

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

où $|\phi| < 1$ *et les* ε_t *sont des variables aléatoires i.i.d. de loi normale* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. *Monter que le processus* X_t *est causal.*
2. *Le processus* X_t *est-il stationnaire au second ordre ? Justifier votre réponse.*
3. *Ecrire la fonction de vraisemblance de* $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$.
4. *En déduire les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramÃ¨tres inconnus* ϕ *et* σ^2.

Exercice 2 *Soit le processus stochastique* X_t, *oú* ε_t *est un bruit blanc de variance notée* σ_ε^2.

$$X_t - 0.2X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}$$

1. *Déterminer le type de ce processus et son ordre.*
2. *Calculer l'espérance du processus* X_t.
3. *Le processus est-il inversible ? Justifier votre réponse.*
4. *Le processus est il causal ? Si oui, donner sa forme causale.*

Exercice 3 *Soit le processus stochastique* $(X_t)_{t \in Z}$ *défini par*

$$X_t - 0.3X_{t-1} = \varepsilon_t$$

oú ε_t *est un bruit blanc centré de variance* σ_ε^2 *et* γ *la fonction d'autovovariance du processus* $(X_t)_{t \in Z}$.

1. *Calculer* $E(X_t)$, *puis montrer que la fonction d'autocovariance vérifie la relation* $\gamma(h) = 0.3\gamma(h-1), \forall h > 0$.

2. *Résoudre la relation de récurrence en exprimant la solution* $\gamma(h)$ *en fonction de* $\gamma(0)$.

3. *Donner l'expression de* $(X_t)_{t\in Z}$ *sous la forme d'une moyenne mobile.*

4. *Calculer* $\gamma(0)$ *en fonction de* σ_ε^2.

Correction exercice 4 1. *On a* $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow \Phi(B)X_t = \varepsilon_t$, *oú* $\Phi(z) = 1 - \phi z$. *Le processus* (X_t) *est causal car le zéro du polynÃ´me autoregressif est situé Ã l'extérieur du disque de centre 0 et de rayon 1 . En effet,*

$$1 - \phi z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\phi} \text{ et } \left|\frac{1}{\phi}\right| > 1 \text{ car } |\phi| < 1.$$

2. *Comme* (X_t) *est causal, on a* $X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \xi_j \varepsilon_t t - j$ *avec* $\sum_{j=0}^{+\infty} \left|\xi_j\right| < \infty$. *De plus,* (ε_t) *est stationnaire au second ordre car* ε_t *est un bruit blanc. Donc d'aprÃ¨s le théorÃ¨me de filtrage linéaire,* (X_t) *est stationnaire au second ordre.*

3. *On a*

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N}(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n) &= \prod_{t=1}^{N} f_\varepsilon(\varepsilon_t) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{N} \left(x_t - \phi x_{t-1}\right)^2\right) \end{aligned}$$

4. *Le Log vraisemblance est* $L\left(x_1, x_2, \ldots, x_N, \phi, \sigma^2\right) = -\frac{N}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\frac{\sum_{t=1}^{N}\left(x_t - \phi x_{t-1}\right)^2}{\sigma^2}$, *donc*

$$* \, \hat{\phi}_n = \operatorname{argmin}\left(\frac{N}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) + \frac{\sum_{t=1}^{N}\left(x_t - \phi x_{t-1}\right)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$* \, \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{N}\left(x_t - \phi x_{t-1}\right)^2}{N}$$

Correction exercice 5 1. *Ce processus est un ARMA(1,1).*

2. *Calcul de la moyenne du processus*

$$\begin{aligned} X_t - 0.2X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1} &\Rightarrow E(X_t) - 0.2E(X_{t-1}) = E(\varepsilon_t) - 0.4E(\varepsilon_{t-1}) \\ &\Rightarrow 0.8E(X_t) = 0.6E(\varepsilon_t) \\ &\Rightarrow E(X_t) = 0 \end{aligned}$$

3. *Inversibilité Nous avons*

$$X_t - 0.2X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1} \Rightarrow (1-0.2L)X_t = (1-0.4L)\varepsilon_t$$

Le Processus est inversible car le zéro du polynome $(1-0.4L)$ *est égale Ã 2.5 , donc Ã l'éxterieur du disque d'unité.*

4. *Causalité * La causalité*

$$X_t - 0.2X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1} \Rightarrow (1-0.2L)X_t = (1-0.4L)\varepsilon_t$$

Le Processus est causal car le zéro du polynome $(1-0.2L)$ *est égale Ã 5 , donc Ã l'éxterieur du disque d'unité. * La forme causal*

$$\begin{aligned}
X_t - 0.2X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1} &\Rightarrow (1-0.2L)X_t = (1-0.4L)\varepsilon_t \\
&\Rightarrow X_t = (1-0.4L)\frac{1}{1-0.2L}\varepsilon_t \\
&\Rightarrow X_t = (1-0.4L)\left(\sum_{i\geq 0}(0.2L)^i\right)\varepsilon_t \\
&\Rightarrow X_t = \left(\sum_{i\geq 0} 0.2^i L^i - \sum_{i\geq 0} 0.4 * 0.2^i L^{i+1}\right)\varepsilon_t \\
&\Rightarrow X_t = \left(1 + \sum_{i\geq 1} 0.2^i L^i - \sum_{i\geq 1} 0.4 * 0.2^{i-1} L^i\right)\varepsilon_t \\
&\Rightarrow X_t = \left(1 + \sum_{i\geq 1}\left(0.2^i - 0.4 * 0.2^{i-1}\right)L^i\right)\varepsilon_t \\
&\Rightarrow X_t = \left(1 - \sum_{i\geq 1} 0.2^{i-1} L^i\right)\varepsilon_t
\end{aligned}$$

Correction exercice 6 1. *Nous avons*

$$X_t - 0.3X_{t-1} = \varepsilon_t$$

Donc, $E(X_t) - 0.3E(X_{t-1}) = E(\varepsilon_t) = 0$, *d'ou* $E(X_t) = 0$. *De plus, on multipliant par* X_{t-1}

prenant l'espérance nous aurons

$$E\left(X_{t+h}X_t\right) - 0.3E\left(X_{t+h}X_{t-1}\right) = E\left(X_{t+h}\varepsilon_t\right)$$

comme $E\left(X_t\right) = 0$ *et* X_{t+h}, ε_t *sont indépendantes* $\forall h > 0$, *cette relation reviens Ã*

$$\gamma(h) = 0.3\gamma(h-1)$$

2. *De la question précédente, nous avons*

$$\gamma(h) = 0.3\gamma(h-1) = 0.3 * 0.3\gamma(h-2) = \ldots = 0.3^h\gamma(0)$$

3. *La forme moyenne mobile infini*

$$\begin{aligned} X_t - 0.3X_{t-1} = \varepsilon_t &\Rightarrow (1-0.3L)X_t = \varepsilon_t \\ &\Rightarrow X_t = \frac{1}{1-0.3L}\varepsilon_t \\ &\Rightarrow X_t = \left(\sum_{i\geq 0}(0.3L)^i\right)\varepsilon_t \\ &\Rightarrow X_t = \sum_{i\geq 0} 0.3^i\varepsilon_{t-i} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 = E\left(\varepsilon_t^2\right) &= E\left(X_t - 0.3X_{t-1}\right)^2 \\ &= E\left(X_t^2\right) - 0.6E\left(X_tX_{t-1}\right) + 0.09E\left(X_{t-1}\right)^2 \\ &= \gamma(0) - 0.6\gamma(1) + 0.09\gamma(0) \\ &= \gamma(0) - 0.18\gamma(0) + 0.09\gamma(0) \text{ (vue la stationnarité de } X_t\text{)} \\ &\Rightarrow \gamma(0) = \frac{1}{0.81}\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$