Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques   Matière *: Analyse 03*

Solution des exercices TD N^0:05 (Intégrales généralisées)

<u>Solution de l'éxercice n°1</u>

Etudions si les intégrales impropres suivantes sont convergentes et donnons leurs éventuelle valeurs

1. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx$, $n \in \mathbb{N}$.On a :

$$x^n \exp(-x) = O\left(\exp(-x)\right), \text{ quand } x \to +\infty.$$

Puisque $\int\limits_0^{+\infty} \exp(-x)dx$ converge, on déduit que $\int\limits_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx$ converge aussi.

Calculons sa valeur :

On fait l'intégration par parties.

Posons

$$f(x) = x^n \text{ et } \dot{g}(x) = \exp(-x).$$

On a alors

$$\dot{f}(x) = nx^{n-1} \text{ et } g(x) = -\exp(-x).$$

Par suite :

$$\begin{aligned} I_n &= \int\limits_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx \\ &= \lim_{y\to+\infty} \left[-nx^{n-1}\exp(-x)\right]_0^y + n\int\limits_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx \\ &= nI_{n-1}. \end{aligned}$$

Par récurrence, on trouve $I_n = n!I_0$.

Puisque $\int\limits_0^{+\infty} \exp(-x)dx = 1$, on a alors $I_n = n!$.

2. $J_n = \int\limits_0^1 \ln^n(x)dx,\ n \in \mathbb{N}$.

Toujours, on fait l'intégration par parties, en posant :

$$\dot{f}(x) = 1 \text{ et } g(x) = \ln^n(x),$$

on trouve :

$$f(x) = x \text{ et } \dot{g}(x) = n\frac{\ln^{n-1}(x)}{x}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 \ln^n(x)dx \\ &= \lim_{y\to 0} [x\ln^n(x)]_y^1 - n\int_0^1 \ln^{n-1}(x)dx \\ &= -nJ_n. \end{aligned}$$

Par récurrence, on trouve $J_n = (-1)^n n! J_0$.

Puisque $J_0 = 1$, on a alors $J_n = (-1)^n n!$, et l'intégrale considérée converge.

3. $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$. Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}$.

Il suffit d'étudier la convergence des deux intégrales $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$ et $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$.

Au voisinage de 0^+, on a :

$$f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \text{ quand } x \to 0^+.$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est donc l'intégrale de Riemann qui converge, ce qui montre la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$.

Au voisinage de 2, on a :

$$f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right), \text{ quand } x \to 2.$$

$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ est donc l'intégrale de Riemann qui converge, ce qui montre la convergence de l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$.

On en déduit alors que $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$ converge.

Calculons sa valeur :

Le changement de variable

$$y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto x = g(y) = 2\sin^2 y,$$

est une bijection croissante de classe C^1 de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,2[$ .On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin y\cos y}{2\sin y\cos y}dy \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \pi\end{aligned}$$

Solution de l'éxercice n°2

Etudions la convergence des intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha |\ln x|^\beta}dx$. Posons $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$. Cette fonction est positive, équivalente au voisinage de 0^+ à $\frac{1}{x^{\alpha-1}|\ln x|^\beta}$.
Il s'agit alors d'une intégrale de Bertrand qui converge si et seulement si $\alpha < 2$ et $\beta \in \mathbb{R}$, ou $\alpha = 2$ et $\beta > 1$.

2. $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x\sin x)}{|x\ln x|^\delta}dx$. Posons $f(x) = \frac{\ln(1+x\sin x)}{|x\ln x|^\delta}$. Cette fonction est positive, équivalente au voisinage de 0^+ à $\frac{x^2}{x^\delta\left|\ln^\delta x\right|} = \frac{1}{x^{\delta-2}\left|\ln^\delta x\right|}$.
Il s'agit alors d'une intégrale de Bertrand qui converge si et seulement si $\delta - 2 < 1$ et $\delta \in \mathbb{R}$, ou $\delta - 2 = 1$ et $\delta > 1$, soit donc $\delta \leq 3$.

3. $I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan(x^2)}{x^3|\ln x|}dx$. Posons $f(x) = \frac{\arctan(x^2)}{x^3|\ln x|}$. Cette fonction est positive, équivalente au voisinage de 0^+ à $\frac{x^2}{x^3|\ln x|} = \frac{1}{x|\ln x|}$.
Il s'agit alors d'une intégrale de Bertrand qui diverge.

4. $I_4 = \int_1^2 \frac{|x-1|^\alpha}{|\ln x|^\beta}dx$. Posons $f(x) = \frac{|x-1|^\alpha}{|\ln x|^\beta}$. Cette fonction est positive, équivalente au voisinage de 1 à $\frac{|x-1|^\alpha}{|x-1|^\beta} = \frac{1}{|x-1|^{\beta-\alpha}}$.
La comparaison avec l'intégrale de Riemann afirme que cette intégrale converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

5. $I_4 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$. Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$. Cette fonction est positive, équivalente au voisinage de 1^+ à $\frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$. Il s'agit alors d'une intégrale de Riemann qui converge.
Au voisinage de 2^- à $\frac{1}{\sqrt{(2-x)}}$. Il s'agit alors d'une intégrale de Riemann qui converge. On en déduit

alors que $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ est convergente.

Solution de l'éxercice n°3

Etudions la convergence absolue et la semi-convergence des intégrales généralisées suivantes :

1. $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\theta} dx$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^\theta}$.

Si $\theta > 1$, $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^\theta}$ La comparaison avec l'intégrale de Riemann affirme que cette intégrale converge.
Donc $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\theta} dx$ est absolument convergente pour tout $\theta > 1$.

Si $0 < \theta < 1$, on a

$$|f(x)| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\theta} = \frac{1}{2x^\theta} - \frac{\cos 2x}{x^\theta}.$$

Puisque $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^\theta} dx$ est l'intégrale de Riemann qui diverge (car $\theta < 1$) et $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos 2x}{x^\theta} dx$ converge d'après Abel, donc l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2x^\theta} - \dfrac{\cos 2x}{x^\theta} \right) dx$ diverge, on en déduit que $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\theta} dx$ ne converge pas absolument.
D'autre part cette intégrale est convergente d'après Abel, ce qui montre la semi-convergence de cette intégrale pour tout $0 < \theta < 1$.

2. $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x} + \cos x} dx$.

Un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$ nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{\sqrt{x} + \cos x} &= \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1 + \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos^2 x}{x} \left(1 + \epsilon(\frac{1}{x}) \right) \right), \ \epsilon(\frac{1}{x}) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty \\
&= \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos^2 x}{x} + \frac{\cos^3 x}{x\sqrt{x}} \left(1 + \epsilon(\frac{1}{x}) \right), \ \epsilon(\frac{1}{x}) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty.
\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales sont semi-convergentes et la troisième est absolument convergente.
On en déduit que $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x} + \cos x} dx$ est semi-convergente.

Solution de l'éxercice n°4

1. Montrons que $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2} dx$ est absolument convergente et que pour tout $\alpha \neq \lim_{\alpha \to +\infty} F(\alpha) = 0$.

Puisque $\left| \dfrac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2} \right| \leq \dfrac{1}{1 + x^2}$ et l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{1 + x^2} dx = \dfrac{\pi}{2}$ converge, l'intégrale considérée est donc absolument convergente.

2. Soit maintenant α un réel strictement positif.

On fait l'intégration par partie sur le segment $[0, y]$ en posant :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2},\ \dot{f}(x) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \\ \text{et } \dot{g}(x) &= \cos(\alpha x),\ g(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\int_0^y \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}dx = \frac{1}{\alpha}\left(\left[\frac{\sin(\alpha x)}{1+x^2}\right]_0^y - \int_0^y \frac{2x\sin(\alpha x)}{\left(1+x^2\right)^2}dx\right).$$

On passe à la limite, quand $y \to +\infty$, on trouve :

$$F(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^y \frac{2x\sin(\alpha x)}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} |F(\alpha)| &= \frac{1}{\alpha}\int_0^y \frac{2x\,|\sin(\alpha x|)}{\left(1+x^2\right)^2}dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\int_0^y \frac{2x\,|\sin(\alpha x|)}{\left(1+x^2\right)^2}dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\int_0^y \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit alorq que $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$.

Solution de l'éxercice n°4

Soient P et Q deux polynômes tels que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Etudions la convergence de l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos(x)dx.$$

1. Si $\deg(P) = \deg(Q) - 1$:

Un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ nous permet d'écrire :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(x) = \frac{\alpha}{x}\cos(x) + \frac{\cos(x)}{x^n}\left(\beta + \epsilon(x)\right),\ \epsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty,$$

où α et β sont des réels, $n \geq 2$ un entier positif.

La première intégrale est semi-convergente et la deuxième est absolument convergente.

On en déduit que $\int\limits_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x) dx$. est semi-convergente.

2. 1. Si $\deg(P) \leq \deg(Q) - 2$:

Un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ nous permet d'écrire :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x) = \frac{\alpha}{x^n} \cos(x) \left(1 + \epsilon(x)\right), \; n \geq 2 \text{ et } \epsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty.$$

On obtient alors une intégrale absolument convergente.

.