Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila
Deuxième Année LMD Mathématiques 2020-2021 Matière : *Analyse 03*

Solutions de Td N^0 : 4 (Séries de Fourier)

Solution de l'éxercice n°1

I. 1. Montrons que la série de fonctions $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $|a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|\leq|a_n|+|b_n|$. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ sont absolument convergentes, alors d'après Weiersrass, $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ est uniformément convergente.

2. $a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ est continue et la série $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ est uniformément convergente, on en déduit que la somme

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)),\qquad(1)$$

est une fonction continue.

3. On multiplie le terme général de la série trigonométrique (1) par $\cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right)$ ou par $\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)$ et en vertue des inégalités suivantes :

$$\left|\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right)\right|\leq|a_n|+|b_n|,\ \text{pour tout } x\in\mathbb{R},\qquad(2)$$

$$\left|\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)\right|\leq|a_n|+|b_n|,\ \text{pour tout } x\in\mathbb{R},\qquad(3)$$

on peut assurer la convergence uniforme des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\ \cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right)\qquad(4)$$

et

$$\sum_{n\geq1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)\qquad(5)$$

Par conséquent, on peut les intégrer terme à terme.

Maintenant, en utilisant les propriétés :

$$\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=0,\ \text{pour tout } n\neq p, \tag{6}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos^2\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\sin^2\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=l, \tag{7}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=0,\ \text{pour tout } n,p\geq 1, \tag{8}$$

on trouve

$$\int_{-l}^{l}S(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=la_n,\ n\geq 0, \tag{9}$$

$$\int_{-l}^{l}S(x)\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=lb_n,\ n\geq 1, \tag{10}$$

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\left|f(x)-S_n(x)\right|\leq\sum_{k\geq n+1}|a_k+b_k|,$$

quantité tendant vers 0, quand $n\to+\infty$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\left|f^2(x)-S_n^2(x)\right| &= \left|f(x)-S_n(x)\right|\left|f(x)+S_n(x)\right|\\ &\leq \sum_{k\geq n+1}|a_k+b_k|\left(2\times\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{k\geq 1}|a_k+b_k|\right)\to 0,\ \text{quand } n\to+\infty.\end{aligned}$$

La suite de fonction S_n^2 est donc uniformément convergente vers f^2.

5. Cette dernière convergence uniforme nous permet d'écrire

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}S_n^2(x)dx\right)$$

En utilisant toujours les propriétés (6), (7) et (8) et le fait que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+2\sum_{i,j=1_{i\neq j}}^{n}\alpha_i\alpha_j \text{ et } \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\frac{a_0^2}{4}dx=\frac{a_0^2}{2},$$

on en déduit bien que $\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}S_n^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$.

En faisant n tendre vers $+\infty$, on trouve $\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(a_n^2+b_n^2\right)$.

II. Application

1. f 2π-périodique définie par : $f(x) = x^2$, pour $x \in [-\pi, \pi]$.

2. f est de classe C^1 par morçeaux sur $\mathbb{R}$, d'aprés Dirichlet f est développable en série de Fourier.

3) f est paire, alors $b_n = 0, \forall n \geq 1$, et $a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{x^2}{2}dx = \frac{\pi^2}{3}$.

Le calcul de a_n se fait par une double intégration par parties, et on trouve :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{x^2}{2}\cos(nx)dx = \frac{2}{n^2}(-1)^n.$$

La série de Fourier est donc $S_F(f) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

4) *$x = \pi$ est un point de continuité, alors $f(\pi) = S(\pi) \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$, ce qui implique $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

*$x = 0$ est aussi un point de continuité, on obtient cette fois

$$f(0) = S(0) \Leftrightarrow 0 = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ ce qui implique } \sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

*L'égalitéé de Parseval donne $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{x^4}{4}dx = \frac{\pi^4}{10} = \frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$. i.e $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

<u>Solution de l'éxercice n°2</u>

f 2π-périodique définie par : $f(x) = x$, pour $x \in]-\pi, \pi[$.

2. f 2π-périodique et est de classe C^1 par morçeaux sur $\mathbb{R}$, d'aprés Dirichlet f est développable en série de Fourier**.**

3. f est impaire, alors $a_n = 0, \forall n \geq 0$.

$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin(nx)dx$. Par parties :

$$b_n = \frac{2}{\pi}(\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi \cos(nx)dx) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

La série de Fourier de f est donc : $s_f(x) = 2\sum\limits_{n\geq0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$.

4. $x = \frac{\pi}{2}$ est un point de continuité, donc

$$f(\frac{\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}(-1)^n \Rightarrow \sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

5. L'égalitéé de Parseval donne $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x^2dx = \frac{2\pi^2}{3} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2$. i.e $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1^2}.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1^2}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$