Chapitre III

MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES

3.1 Introduction

Que signifie résoudre une équation différentielle ?

- Solutions explicites en termes de fonctions élémentaires

- Nécessité d'ajouter des conditions additionnelles pour choisir une solution dans l'ensemble des solutions

Définition 52 *Un problème de résolution d'EDP est bien posé si*

- Il existe une solution

- Cette solution est unique

- La solution dépend continûment des conditions aux limite

Remarque 53 *On distingue différents types de conditions aux limites :*

1. ***Conditions de Dirichlet :*** *u est fixée sur le bord de I*

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

2. ***Conditions de Neumann :*** *La dérivée normale de u est fixée sur I*

$$u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$$

3. ***Conditions de Robin ou mixtes***

$$c_1(x)u(a,t) + c_2(x)u_x(b,t) = 0$$

4. ***Conditions périodiques***

$$u(a,t) = u(b,t) = 0 \text{ et } u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$$

3.2 Rappel

Définition 54 *Soit* $[a, b]$*un intervalle (borne ou non) de* $\mathbb{R}$*. On dit que la fonction* f *est "carré intégrable " si :*

$$\int_a^b |f(x)|^2 < \infty$$

Théorème 55 *Soit* E *l'espace vectoriel des "classes d'équivalences pour l'égalité presque partout " des fonctions de carré intégrable .*

Soit $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)$; $\langle f, g\rangle$ *est un produit scalaire sur* E *qui est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire. On note* $E = L^2(a, b)$ *et* $\|f\|_2 = \left\{\int_a^b |f(x)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ *la norme correspondante*

Définition 56 *Soit* E *un espace vectoriel de fonction, un opérateur linéaire sur* E *est un application* A *définie sur* E *et telle que :*

1) $A(\lambda u) = \lambda A(u), \forall u \in E$ et $\lambda \in IR$ ou $\mathbb{C}$ suivant que E est construit sur IR ou $\mathbb{C}$.

2) $A(u + v) = A(u) + A(v)$.

Définition 57 *Espace* $L^2_\delta(a, b)$.

Soit δ*une fonction strictement positive sur* $[a, b]$, *on note* $L^2_\delta(a, b)$ *L'espace vectoriel des fonctions* f *telle que :*

$$\int_a^b |f(x)|^2 \delta(x) < \infty$$

La quantité $\langle f, g\rangle_\delta = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)\delta(x)dx$ *est un produit scalaire sur cet espace qui est complet pour la norme associée et est ainsi un espace de Hilbert sa plus la convergence en moyenne quadratique par rapport à* δ *est :* $f_n \to f$ *dans* $L^2_\delta(a, b)$ *si :*

$$\|f_n - f\|_\delta^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \delta(x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note que $f \in L^2_\delta(a, b)$ *si est seulement si* $f(\delta)^{1/2} \in L^2(a, b)$

Exemple 58 *1) Soit* $\delta(x) = x^2, \frac{1}{x} \notin L^2(0,1)$ *mais* $\frac{1}{x} \in L^2_\delta(0,1)$

2) $\delta(x) = x^2, f_n(x) = \sqrt{n}1_{[0,1/n]}, f_n \in L^2(0,1)\ \forall n \in \mathbb{N}$ *et* $f_n \in L^2_\delta(0,1), \forall n \in \mathbb{N}$.

$\|f_n\|^2 = 1$ *donc* f_n *ne converge pas dans* $L^2(0,1)$ *vers 0 lorsque* $n \to \infty$

$\|f_n\|_\delta{}^2 = \frac{1}{3n^2}$ *donc* $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *dans* $L^2_\delta(0,1)$.

Définition 59 *Soit* A *un opérateur linéaire défini sur un espace vectoriel de fonction* E. *On appelle valeur propre de* A *un nombre* μ *tel que* $\exists f \in E$ *et* $f \neq 0$ *vérifiant* $Af = \mu f$.

On dit que f *est une fonction propre associée à la valeur propre* μ.

Exemple 60 *1) Soient* φ *et* ψ *deux éléments non nuls de* $L^2(0,1)$ *et* $E = L^2(0,1)$

$$Af(x) = \varphi(x) \int_0^1 \psi(y)f(y)dy,$$

un opérateur linéaire sur E.

μ *est un valeur propre s il existe* $f \neq 0$ *telle que* $\mu f(x) = \varphi(x) \int_0^1 \psi(y)f(y)dy$.

0 *est un valeur propre et tout les fonctions orthogonales avec* ψ *sont des fonctions propres associée à* 0.

Si $\mu \neq 0$ *, soit* $f = a\varphi$ *telle que :*

$$\mu a\varphi(x) = \varphi(x) \int_0^1 \psi(y)a\varphi(y)dy. a \neq 0 \text{ car } f \neq 0$$

donc $\mu = \int_0^1 \psi(y)\varphi(y)dy$.

3.3 Problème de Sturm-Liouville : (problème régulier)

Définition 61 *Soit :* p, q *et* s *trois fonctions continues sur* $[a,b]$ *telle que :*

$q > 0, s > 0$ *et* p *de classe* C^1.

Soit (E) :

$$\frac{d\left[p(x)\frac{df}{dx}\right]}{dx} + q(x)f(x) + \lambda s(x)f(x) = 0$$

et (F) :

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = 0 & |a_0| + \ |a_1| > 0 \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = 0 & |b_0| + \ |b_1| > 0 \end{cases}$$

La recherche des nombres λ *et des fonctions* $f \neq 0$ *la solution de* (E) *qui vérifiant les conditions* (F) *s'appelle un problème régulier de Strum-Liouville.*

C'est la recherche des valeurs propres $-\lambda$ et des fonctions f d'opérateur A défini par :

$$[Af](x) = \frac{1}{s(x)} \left[\frac{d\left[p(x)\frac{df}{dx}\right]}{dx} + q(x)f(x) \right],$$

défini sur l'espace vectoriel E (des fonctions deux fois dérivables) et qui vérifiant les conditions (F).

Théorème 62 *1) Il existe une famille dénombrable de valeur propre réelles et simples de* A : $|\lambda_0| < |\lambda_1| < ..... < |\lambda_n|$ *et* $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = +\infty$*, et une fonction propre* φ_n*associée à* λ_n *vérifie :*

$$\frac{d\left[p(x)\frac{d\varphi_n}{dx}\right]}{dx} + q(x)\varphi_n(x) + \lambda s(x)\varphi_n(x) = 0$$

2) la suite $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$*, est une base de* $L_s^2(a,b)$*, ,* φ_n *a exactement un* n *zéro sur* $]a,b[$*,* φ_{n-1} *a un zéro entre deux zéros consécutifs de* φ_n*.*

3) Si φ *satisfait les conditions* (F) *est continue et que sa dérivée* φ' *est continue par morceaux alors* $\sum_{n=0} \langle \varphi, \varphi_n \rangle_{L_s^2(a,b)} \varphi_n$ *converge non seulement dans* $L_s^2(a,b)$ *mais aussi uniformément et absolument sur* $[a,b]$*.*

$$\forall x \in [a,b]\, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, \varphi_n \rangle_{L_s^2(a,b)} \varphi_n.$$

3.4 Expose de la méthode de séparation des variables

Soit L un opérateur différentiel linéaire et $Au = 0$ des conditions frontières linéaire, on veut résoudre l'équation (E) avec les conditions frontīēres (F) et la condition initiale (I) :

$$
\begin{aligned}
(E) &: \quad Lu = 0, \\
(F) &: \quad Au = 0, \\
(I) &: \quad u(x,0) = f(x).
\end{aligned}
$$

Théorème 63 (Méthode pratique)

1. On cherche d'abord les solutions de (E) vérifiant (F) qui sont de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. Cela conduit à un problème de Sturm-Liouville dont les solutions sont constituées par une suite $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t), n \in \mathbb{N}$ de fonctions vérifiant (E) et (F) . En général X_n est complètement déterminer mais pas T_n.

2. Pour réaliser la condition initiale ou utilise le fait que la suite $X_n, n \in \mathbb{N}$ est une base dans un espace L^2_δ convenable .

   On suppose que f appartient à cet espace. et on l'a développé par rapport à cette base :

   $$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X_n(x) T_n(t)$$

   est alors déterminée par la relation $T_n(0) = c_n$ et la solution est

   $$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n(x) T_n(t).$$

Exemple 64 *On considèe l'équation de chaleur défini par :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < h, t > 0.$$

avec les conditions initial $u(x,0) = f(x)$, *et les conditions frontiëres* $u(0,t) = u_x(h,t) = 0$.

On suppose que :

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

on trouve :

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t),$$

donc

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Comme T est une fonction dépend de t et X est une fonction dépend de x on a

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \qquad (*)$$

avec λ est un constante.

On a

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \Rightarrow X(0)\,T(t) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ ou \\ T(t) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

On pose $x(0) = 0$, on a aussi

$$\begin{aligned} u_x(h,t) &= 0 \Rightarrow X'(h)\,T(t) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} X'(h) = 0 \\ ou \\ T(t) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

On pose $X'(h) = 0$

D'après la relation $(*)$ on trouve un problème de Sturm-Liouville pour $X(x)$ définir par :

$$\begin{cases} X" + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X'(h) = 0. \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

Exemple 65 *Les solutions d'équation (A)dépendent du signe deλ.*

- Pour $\lambda = 0$, $X(x) = ax + b$ avec $X(0) = 0, X'(h) = 0$ soit $X(x) = 0$.

- Pour $\lambda < 0$, $X(x) = aexp(\sqrt{-\lambda}x) + bexp(\sqrt{\lambda}x)$. Les conditions de bord font que là aussi on doit avoir $a = b = 0$, donc $X(x) = 0$

- Pour $\lambda > 0$, les valeurs propres et les fonctions propres sont :

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= \left(\frac{(2n-1)\,\pi}{2h}\right)^2 \\
X_n &= \alpha_n \sin \frac{(2n-1)\,\pi}{2h} x, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Pour $T\,(t)$ on a : $T' = -k\lambda_n T \Rightarrow T_n = c_n \exp(-k\lambda_n t)$.

Avec les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$, donc

$$T_n = c_n \exp(-k\lambda_n t)$$

On trouve

$$u_n(x,t) = \alpha_n c_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) \exp(-k\lambda_n t)$$

Donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) \exp(-k\lambda_n t)$$

avec

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\right) x = f(x) \\
a_n &= \int_0^h f(x) \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right)(x).
\end{aligned}
$$