Centre Universitaire de Mila **Nom**

3ème année Licence Mathématiques **Prénom**

Module : *Transformations intégrales dans les espaces Lp* **Groupe**

Corrigé type de l'*Examen*

Date : 18/06/2022. **Durée** : 1h

***Exercice 1* (10 points)** Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad g_a(x) = \frac{1}{a^2+x^2}, \quad a > 0.$$

1) Calculer la transformée de Fourier de f (2 pts)

f est une fonction paire alors

$$F(f(x)) = F(e^{-a|x|}) = 2\int_0^\infty e^{-ax}\cos wx\,dx \quad 0,5 \times 4$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{-ax} e^{iwx}\,dx\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{(-a+iw)x}\,dx\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{-a+iw} e^{(-a+iw)x}\Big|_0^\infty\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a-iw}\right)$$

$$= \frac{2a}{a^2+w^2}$$

2) Déduire par deux méthodes la transformée de Fourier de g_a

1=ér Méthode [*La propriété* $F(F(f(x))) = 2\Pi f(-x)$] (1.5 pts)

Nous avons $F(f(x)) = \dfrac{2a}{a^2+w^2} = 2a\,g_a(w)$ $\quad 0,5 \times 3$

donc $F(F(f(x))) = F(2a\,g_a(w)) = 2\pi f(-x) = 2\pi e^{-a|x|}$

$\Rightarrow 2a\,F(g_a(w)) = 2\pi e^{-a|x|}$ d'où $F(g_a(w)) = \dfrac{\pi}{a} e^{-a|x|}$

2=ÉME Méthode [*La transformée inverse de Fourier*] (3 pts)

Nous avons: $\hat{f}(w) = F(f(x)) \Longleftrightarrow f(x) = F^{-1}(\hat{f}(w))$ $\quad 0,25$

$$\Longleftrightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, e^{iwx}\,dw \quad 0,5$$

Comme $F(f(x)) = F(e^{-a|x|}) = \dfrac{2a}{a^2+w^2}$ $\quad 0,25$

alors: $$e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2a}{a^2+w^2}e^{iwx}\,dw$$

$$= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+w^2}e^{+iwx}\,dw \quad 0{,}5 \quad (*)$$

D'autre part: $$\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+x^2}e^{-iwx}\,dx \quad 0{,}5$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\pi}{a}e^{-a|-w|} \qquad \boxed{\frac{\pi}{a}f(w)}$$

$$= \frac{\pi}{a}e^{-a|w|} \quad 0{,}5$$

d'où $$F(g(x)) = \hat{g}(w) = \frac{\pi}{a}e^{-a|w|} \quad 0{,}5 \quad (**)$$

3) Maintenant, soit l'équation avec le produit de convolution suivante

$$h * g_1(x) = g_2(x)$$

*Ecrire l'équation intégrale correspondante (1 pt)

$$h * g_1(x) = g_2(x) \Leftrightarrow \int_0^x f(t)\cdot g_1(t-x)\,dt = g_2(x) \quad 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)\cdot\frac{1}{1^2+(t-x)^2}\,dt = \frac{1}{2^2+x^2} \quad 0{,}25$$

d'où $$\int_0^x \frac{f(t)}{1+(t-x)^2}\,dt = \frac{1}{4+x^2} \quad 0{,}25$$

*Déterminer $\hat{h}$ (1 pt)

Nous avons $h * g_1(x) = g_2(x)$ alors: $\hat{h}\cdot\hat{g}_1 = \hat{g}_2$ $0{,}5$

donc $$\hat{h}(w) = \frac{\hat{g}_2(w)}{\hat{g}_1(w)} = \frac{\frac{\cancel{\pi}}{2}e^{-2|w|}}{\cancel{\pi}\,e^{-|w|}} = \frac{1}{2}e^{-|w|} \quad 0{,}5$$

*Déduire la formule de h (1.5 pts)

Nous avons $$\hat{h}(w) = \frac{1}{2}e^{-|w|} \Leftrightarrow h(x) = F^{-1}\left(\frac{1}{2}e^{-|w|}\right) \quad 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2}F^{-1}\left(e^{-|w|}\right)$$

$$(**) \Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{\pi}{a}e^{-a|w|}\right) = g(x) = \frac{1}{a^2+x^2} \quad 0{,}5$$

d'où $$h(x) = \frac{1}{2\pi(1+x^2)} \quad 0{,}5$$

Exercice 2 (10 points)

1) Soit $a \in \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tq $f(t) = te^{at}$. Calculer la transformée de Laplace de f par deux méthodes

1–èr Méthode [*Par les propriétés*] (1 pt)

Soit $g(t) = t \Longrightarrow G(p) = \dfrac{1}{p^2}$ (0,25)

donc $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(e^{at} g(t)) = G(p-a)$ 0,5

d'où $\mathcal{L}(te^{at}) = \dfrac{1}{(p-a)^2}$ (0,25)

2–ème Méthode [*Par la définition*] [Et déterminer l'abscisse de la convergence simple] (2.5 pts)

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, dt = \int_0^\infty t e^{at} e^{-pt} \, dt \quad (0,5)$$

$$= \int_0^\infty t e^{-(p-a)t} \, dt \quad (0,25)$$

$\mathrm{Re}(p-a) > 0$:
$$= t \cdot \frac{-1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p-a} \int_0^\infty e^{-(p-a)t} \, dt \quad (0,5)$$

$$= \frac{1}{p-a} \left(\frac{-1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^\infty \right) \quad (0,25)$$

$\mathrm{Re}\, p > a$:
$$= \frac{-1}{(p-a)^2} \left(e^{-(p-a)\infty} - e^0 \right) \text{ d'où } \mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2} \quad (0,5)$$

L'abscisse de la convergence est : a (0,5)

2) Trouver la transformée de Laplace inverse de la fraction suivante (3 pts)

$$F(p) = \frac{e^p}{p^2(p-1)}$$

$$F(p) = e^p \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1} \right) = e^p \left(\frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1} \right) \quad (1)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p-1}\right)$$

Nous avons $\mathcal{L}\{f(x-c)\} = e^{-cp} F(p)$ donc $\mathcal{L}^{-1}(e^{-cp} F(p)) = f(x-c)$ (0,5)

Alors $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ (0,5) $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p}\right) = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = t$ (0,5) $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p^2}\right) = t+1$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) = e^t$ (0,5) $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^p}{p-1}\right) = e^{t+1}$ d'où

$$f(t) = e^{t+1} - 1 - (t+1) = e^{t+1} - t - 2 \quad (0,5)$$

3) Résoudre l'équation différentielle suivante (3.5 pts)

$$y''(t) + 5y(t) = 2\,sin(t) \quad avec \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

$\mathcal{L}(y''(t)) + 5\mathcal{L}(y(t)) = 2\mathcal{L}(\sin t)$

$p^2 Y(p) - p\,y(0) - y'(0) + 5Y(p) = \frac{2}{p^2+1}$ ← 0,5

$Y(p)[p^2+5] = p + 2 + \frac{2}{p^2+1}$ 0,25

donc $Y(p) = \frac{p+2}{p^2+5} + \frac{2}{(p^2+1)(p^2+5)}$

$= \frac{p+2}{p^2+5} + \frac{A}{p^2+1} + \frac{B}{p^2+5}$ 0,25 $A = \frac{1}{2}$ $B = \frac{-1}{2}$

$= \frac{p+\frac{3}{2}}{p^2+5} + \frac{\frac{1}{2}}{p^2+1}$ ← 0,5

$= \frac{p}{p^2+5} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2+5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$ 0,5

alors: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+5}\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+5}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$

$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+(\sqrt{5})^2}\right) + \frac{3\sqrt{5}}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{p^2+(\sqrt{5})^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$

0,25 x 3

d'où $y(t) = \cos(\sqrt{5}\,t) + \frac{3\sqrt{5}}{10}\sin(\sqrt{5}\,t) + \frac{1}{2}\sin(t)$

0,25 x 3

♣♠ *Bonne chance* ♠♣

✓ *N.Haddad* ✓