Centre Universitaire de Mila

3ème année Licence Mathématiques

Module : Transformations intégrales dans les espaces Lp

Nom

Prénom

Groupe

Corigée

12

INTÉROGATION

1** Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \exp^{-x}$. Montrer que $f \in L^p(]0,+\infty[)$ pour tout $p \in [1,+\infty]$. (2 pts)

Pour $p = +\infty$

$|f(x)| = |e^{-x}| = e^{-x} \leq e^{-0} = 1$ donc f st bornée 0,5

d'où $f \in L^\infty(]0,+\infty[)$ 0,5

Pour $p \in [1,+\infty[$

$\int_0^\infty |f(x)|^p dx = \int_0^\infty e^{-xp} dx = \frac{-1}{p} e^{-px} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p} < +\infty$ 1

d'où $f \in L^p$, $\forall p \in [1,+\infty]$ 0,25

2** Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$. Montrer que $f \in L^1(]0,1])$. (1.5 pts)

$f \in L^1(]0,1]) \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)| dx < +\infty$

$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2} dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2} dx$

$\int \frac{-f'}{f^2} = \frac{1}{f}$

$\frac{1}{1-\ln x}\Big|_0^1 = 1 - \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\ln x} = 1 < +\infty$

d'où $f \in L^1(]0,1])$ (0,25) x 6

3** Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f_n(x) = \sqrt{n}\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}[}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a* Montrer que $f_n \in L^1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (1 pts)

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{n} dx = \sqrt{n} \cdot x \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - 0\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 0,5

On a $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 < +\infty$ donc $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall n \geq 1$ 0,5

b* Montrer que $f_n \to 0$ dans L^1. (1 pts)

$f_n \longrightarrow 0$ dans $L^1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_1 = 0$ 0,25 x 4

$\|f_n - 0\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $f_n \to 0$, dans L^1

4** Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $L^\infty(]1,2[) \subset \bigcap_{p\geq 1} L^p(]1,2[)$. (2.5 pts)

i.e $\forall p \geq 1,\ L^\infty(]1,2[) \subset L^p(]1,2[)$. 0,5

Soit $f \in L^\infty(]1,2[)$ alors: $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ p.p ——— (*) 0,5

$\int_1^2 |f(x)|^p dx \overset{(*)}{\leq} \int_1^2 \|f\|_\infty^p dx = \|f\|_\infty^p \cdot \int_1^2 1\, dx$

$= \|f\|_\infty^p \cdot 1 < +\infty$ (car $\|f\|_\infty < +\infty$) 1

donc $f \in L^p$. 0,25

5** Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(E, \Sigma, \mu)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(E, \Sigma, \mu)$, $f \in L^1(E, \Sigma, \mu)$ et $g \in L^\infty(E, \Sigma, \mu)$ tels que $f_n \to f$ *dans* $L^1(E, \Sigma, \mu)$ *et* $g_n \to g$ *dans* $L^\infty(E, \Sigma, \mu)$.

Montrer que $f_n\, g_n \to f\, g$ dans $L^1(E, \Sigma, \mu)$. (2.5 pts)

$f_n \to f$ dans L^1 i.e. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ 0,25 x3

$g_n \to g$ dans L^∞ i.e $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_\infty = 0$

$f_n g_n \to fg$ dans L^1 i.e $\lim_{n\to\infty} \|f_n g_n - fg\|_1 = 0$

$\int_E |f_n g_n - fg|\, d\mu = \int_E |f_n g_n - f_n g + f_n g - fg|\, d\mu \leq \int_E |f_n (g_n - g)|\, d\mu$

0,25 x4

$+ \int_E |g(f_n - f)|\, d\mu \overset{\text{Holder}}{\leq} \|f_n\|_1 \cdot \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \cdot \|f_n - f\|_1 < \infty$

donc $f_n g_n - fg \in L^1$ et $\|f_n g_n - fg\|_1 \leq \|f_n\|_1 \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_1$

alors $\lim_{n\to\infty} \|f_n g_n - fg\|_1 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\|f_n\|_1}_{\text{bornée}} \cdot \overset{0}{\|g_n - g\|_\infty} + \underbrace{\|g\|_\infty}_{\text{bornée}} \cdot \overset{0}{\|f_n - f\|_1} \right) = 0$

0,25 x3

6** Donner la transformeé de Fourier d'une fonction intégrable puis montrer son existence.(1.5pts)

Si f une fonction intégrable (i.e $f \in L^1$) alors la transformée de Fourier existe et donnée par: $\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx$. 0,5

$\hat{f}(w)$ existe car: 0,5

$|f(x) e^{-iwx}| = |f(x)|$ donc comme f est intégrable alors

$x \mapsto f(x) e^{-iwx}$ est intégrable i.e $\hat{f}(w)$ existe.

0,5

N.Haddad