Transformations Intégrales

Chapitre III : Transformation de Laplace

① Définitions et propriétés :

Définition 01 :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), une fonction localement intégrable. On appelle transformée de Laplace de f la fonction notée $\mathcal{L}(f(x))$ ou $F(P)$ de la variable complexe $p = u + iv$ définie par

$$L\{f(x)\} = F(P) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx \quad \text{.....①}$$

La fonction f est appelée original de F et F l'image de f.

Les notations de la transformée de Laplace sont très variées. Citons à titre d'exemple :

$F(P) = L\{f(x)\}$, $L(f)(P)$, $f(x) \leftarrow F(P)$, $f(x) \sqsupset F(P)$.

Remarques

① La transformée de Laplace $F(P)$ n'existe pas toujours. Par exemple $f(x) = e^{x^2}$ il est facile que

l'intégrale ① n'est pas définie.

② Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction localement intégrable, on définit la transformée de Laplace bilatérale par :

$$L\{f(x)\} = F(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx$$

Notons que la transformée de Laplace de f définie par ① coïncide avec la transformée de Laplace de $H(x) f(x)$ où $H(x)$ est la fonction Heaviside

i.e $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

③ Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tq $f(x) = 0$, $\forall x < 0$.

(i.e f causale), f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et $\exists M > 0$ et σ_0 tq

$$|f(x)| \leq M e^{\sigma x}, \quad \forall x \geq x_0$$

(f dite de type exponentielle à l'infini) alors la transformée de Laplace de f existe pour tout p tq $\operatorname{Re} p \geq \sigma_0$

Théorème 1 :

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction, Alors : si l'intégrale ① est absolument convergente pour $\operatorname{Re} p = a \in \mathbb{R}$, alors il en est de même pour tout p tel que $\operatorname{Re} p \geqslant a$.

Preuve :

On a $p = u + iv$ $(\operatorname{Re} p = u)$

$$|f(x)\, e^{-px}| = |f(x)|\,|e^{-(u+iv)x}|$$

$$= |f(x)|\,|e^{-ux}| \cdot |e^{-ivx}|$$

$$= |f(x)| \cdot |e^{-ux}| = |f(x)| \cdot e^{-ux}$$

$\operatorname{Re} p = u \geqslant a$

$$\leq |f(x)|\, e^{-ax}$$

Puisque $\int_0^\infty |f(x)|\, e^{-ax}\, dx$ existe, on déduit que $\int_0^\infty |f(x)\, e^{-px}|\, dx$ existe aussi.

D'où, la transformée de Laplace $F(p)$ existe dans la demi-plan définie par :

$$\{ p \in \mathbb{C} \; ; \; \operatorname{Re} p \geqslant a \}$$

Corollaire 01 :

Si l'intégrale ① n'est pas convergente pour $\operatorname{Re} p = a$, alors elle n'est pas absolument convergente pour tout $p \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} p \leqslant a$

Théorème 02 :

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Alors :

① S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^\infty f(x)\, e^{-px}\, dx$ converge simplement pour p vérifiant $\operatorname{Re} p > a$ et pour $\operatorname{Re}(p) < a$, $\int_0^\infty f(x)\, e^{-px}\, dx$ est divergente.

a est appelée l'abcisse de la convergence simple.

② S'il existe $b \in \mathbb{R}$, tel que $\int_0^\infty f(x)\, e^{-px}\, dx$ converge absolument pour p vérifiant $\operatorname{Re} p > b$ et pour $\operatorname{Re} p < b$, $\int_0^\infty f(x)\, e^{-px}\, dx$ est ne converge pas absolument.

b est appelée l'abcisse de la convergence absolue.

Exemples 1 :

$(\alpha \in \mathbb{C}\, ,\ \alpha = u + iv)$

① $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto f(x) = e^{\alpha t}$

$\forall p \in \mathbb{C}$ $(p = x + iy)$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{\alpha t}\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\alpha - p} e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\alpha - p} \left(e^{-(x-u)t} \times e^{-i(y-v)t} \Big|_0^\infty \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - p} \left[e^{-(x-u)\infty} \cdot e^{-i(y-v)\infty} - e^0 \cdot e^0 \right]$$

$x > u$

$$= \frac{1}{\alpha - p} \left[\underbrace{e^{-\infty}}_{0} \cdot e^{-i(y-v)\infty} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{p - \alpha}$$

D'où $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p-\alpha}$ pour $p \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$

donc l'abcisse de convergence simple $a = \operatorname{Re} \alpha$

$(w = u + iv \in \mathbb{C})$

② $f : [0, +\infty[\longrightarrow$

$t \longmapsto f(t) = \cos wt$

Soit $p = x + iy \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty \cos wt\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2} e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty e^{-(p-iw)t}\, dt + \int_0^\infty e^{-(p+iw)t}\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{p - iw} e^{-(x+iy-i(u+iv))t} \Big|_0^\infty + \frac{-1}{p+iw} \cdot e^{-(x+iy+i(u+iv))t} \Big|_0^\infty \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{p-iw} e^{-(x+v)t} e^{-i(y-u)t} \Big|_0^\infty - \frac{1}{p+iw} e^{-(x-v)t} e^{-i(y+u)t} \Big|_0^\infty \right]$$

Si $x + v > 0$ et $x - v > 0$

alors. $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{p-iw} (0-1) - \frac{1}{p+iw} (0-1) \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-iw} + \frac{1}{p+iw} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{p + \cancel{iw} + p - \cancel{iw}}{p^2 + w^2} \right]$$

$$= \frac{p}{p^2 + w^2}$$

Donc $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{p}{p^2+w^2}$ pour $p \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} w|$ d'où l'abcisse de convergence $a = |\operatorname{Im} w|$

(Nous avons: $x + v > 0$ et $x - v > 0$

i.e $x > -v$ et $x > v$

donc $\underset{\operatorname{Re} p}{\underset{\shortparallel}{x}} > |v| = |\operatorname{Im} w|$

③ $f(t) = \sin wt \qquad w = u + iv \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \sin wt\; e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i} \cdot e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\int_0^\infty e^{-(p-iw)t}\, dt - \int_0^\infty e^{-(p+iw)t}\, dt\right]$$

Exemple ② $\underset{=}{=} \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-iw} - \frac{1}{p+iw}\right]$ Si $\begin{cases} x+v>0 \\ x-v>0 \end{cases}$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{\cancel{p}+iw-\cancel{p}+iw}{p^2+w^2}\right]$$

$$= \frac{w}{p^2+w^2}$$

donc $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{w}{p^2+w^2}$ pour $p \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}\, p > |\mathrm{Im}\, w|$ d'où l'abcisse de convergence $a = |\mathrm{Im}\, w|$

propriété 01 : (Linéarité)

La transformée de Laplace est une application linéaire. plus précisément,

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall f, g$ deux fonctions d'abcisse de convergence absolue respectives a_1, a_2 alors :

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L\{f(x)\} + \beta L\{g(x)\}$$

$$= \alpha F(p) + \beta G(p)$$

où $\mathrm{Re}\, p > \max(a_1, a_2)$.

propriété 02 : (Translation)

Si $L\{f(x)\} = F(p)$ alors :

$$L\{f(x-c)\} = e^{-cp} F(p), \quad \mathrm{Re}\, p > a.$$

preuve : Posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x-c) & \text{si } x > c \\ 0 & \text{si } x < c \end{cases}$$

On a :

$$L\{g(x)\} = \int_0^\infty g(x)\, e^{-px}\, dx$$

$$= \int_0^c 0\, e^{-px}\, dx + \int_c^\infty f(x-c)\, e^{-px}\, dx$$

$$\underset{y=x-c}{=} \int_0^\infty f(y)\, e^{-py} \cdot e^{-pc}\, dy$$

$$= e^{-pc} \int_0^{\infty} f(y)\, e^{-py}\, dy$$

$$= e^{-pc}\, F(p) .$$

Propriété 03:

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{ f(x)\, e^{-\alpha x} \} = F(p+\alpha) \quad , \; Re\,(p+\alpha) > a$$

Preuve:

$$\mathcal{L}\{f(x)\, e^{-\alpha x}\} = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-(\alpha+p)x}\, dx$$

$$= F(\alpha + p).$$

Propriété 04 (changement d'échelle)

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{ f(cx) \} = \frac{1}{c}\, F\left(\frac{p}{c}\right) \quad , \; c > 0$$

Preuve:

$$\mathcal{L}\{ f(cx)\} = \int_0^{\infty} f(cx)\, e^{-px}\, dx$$

$$\overset{t=cx}{=} \frac{1}{c} \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p \cdot \frac{t}{c}}\, dx$$

$$= \frac{1}{c}\, F\left(\frac{p}{c}\right) .$$

Propriété 05: (Conjugaison complexe)

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{ \overline{f(x)} \} = \overline{F(\bar{p})}$$

Preuve:

$$\mathcal{L}\{ \overline{f(x)} \} = \int_0^{\infty} \overline{f(x)}\, e^{-px}\, dx = \overline{\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-\bar{p}x}} = \overline{F(\bar{p})}$$

Proposition 01:

La transformée de Laplace d'une fonction causale f (i.e $f(x) = 0,\ \forall x < 0$), est une fonction holomorphe (dérivable) dans le domaine de convergence absolue $\{ p \in \mathbb{C} : Re\, p > a \}$ et on a

$$\frac{d^n}{dp^n} F(p) = F^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} (-x)^n f(x)\, e^{-px}\, dx$$

$$= (-1)^n \cdot \mathcal{L}\{ x^n f(x) \}$$

Preuve:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx. \quad , \; Re\, p > a$$

$$\Rightarrow F'(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot (-x)\, e^{-px}\, dx$$

$$\Rightarrow F^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} (-x)^n f(x)\, e^{-px}\, dx.$$

Nous avons : $(-x)^n f(x) e^{-px}$ est absolument intégrable.

En effet $\quad p = a + ib, \quad \operatorname{Re} p = a$

$$\left|(-x)^n f(x) e^{-px}\right| \leq x^n |f(x)| e^{-ax}$$
$$= x^n e^{-(a-a_0)x} |f(x)| e^{-a_0 x}.$$

Comme $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-(a-a_0)x} = 0$ et la fonction $|f(x)| e^{-a_0 x}$ est intégrable, d'où la fonction $x^n |f(x)| e^{-ax}$ serait intégrable et par suite la fonction $(-x)^n f(x) e^{-px}$ est intégrable.

Exemple :

On a : $L\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$ (proposition ①)

Pour : $f(x) = 1$.

$$F(p) = L\{1\} = \frac{1}{p} \quad \text{pour } \operatorname{Re} p > 0$$

d'où $\quad L\{x^n\} = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)}$

c'est-à-dire :

$$L\{x\} = \frac{1}{p^2}, \quad L\{x^2\} = \frac{2}{p^3}, \quad \dots, \quad L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Proposition 02 : (Convolution)

Soient f et g deux fonctions causales de transformées de Laplace respectives $F(p)$ et $G(p)$ et d'abcisses de c. absolues respectives a_1 et a_2 alors

$$L\{f * g(x)\} = F(p) \cdot G(p), \quad \operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2)$$

où

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt.$$

Proposition 03 :

Soit f une fonction localement intégrable, on suppose qu'elle est continue et que sa dérivée $f'(x)$ existe et est continue par morceaux. S'il existe deux constantes $M > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tq $|f(x)| \leq M \cdot e^{ax}$ alors :

$$L\{f'(x)\} = p\, L\{f(x)\} - f(0^+) = p\,F(p) - f(0^+), \quad \operatorname{Re} p > a_0$$

En général, si ses dérivées $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)$ existe et continue alors :

$$L\{f^{(n)}(x)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Proposition 04 :

Si $L\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$L\left\{\int_0^x f(t)\, dt\right\} = \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \max(0, a).$$

Proposition 05: (Comportement à l'infini)

Si f est une fonction localement intégrable d'abcisse d'intégrabilité a_0, alors pour $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a_0$, on a

$$\lim_{|p| \to \infty} F(p) = 0$$

Proposition 06: (Théorème de la valeur initiale)

Soit f une fonction localement intégrable et $F(p)$ sa transformée de Laplace telle que $f(0^+)$ existe, alors.

$$\lim_{p \to \infty} p\,F(p) = f(0^+)$$

Proposition 07: (Théorème de la valeur finale)

Soit f une fonction localement intégrable et $F(p)$ sa transformée de Laplace et telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = f(+\infty)$ existe et est finie, alors.

$$\lim_{p \to 0} p\,F(p) = f(+\infty)$$

② Inversion de la transformée de Laplace:

Théorème 03:

La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, sa bijection inverse existe. Elle est unique et on l'appelle original de F;

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) \iff f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}.$$

En pratique:

- On détermine la transformée inverse de $F(p)$ directement de la table.
- Il faut d'abord exprimer ou décomposer $F(p)$ en une somme de termes dont les transformées inverse sont dans la table.

Propriété.

$\mathcal{L}^{-1}$ est linéaire

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(p) + \beta G(p)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}.$$

Exemples: Nous avons:

- $f(t) = e^{at} \longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \dfrac{1}{p-a}$

Pour $a=0$: $f(t) = 1 \longrightarrow \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{p}$

- $f(t) = \cos wt \longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{p}{p^2+w^2}$
- $f(t) = \sin wt \longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{w}{p^2+w^2}$
- $f(t) = \dfrac{t^k}{k!} e^{at} \longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{(p-a)^{k+1}}$ (TD)

D'où:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1, \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{at}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+w^2}\right\} = \cos wt, \ldots \text{ etc}$$

- Calculer $L^{-1}\left\{\dfrac{a}{p^2-a^2}\right\}$ et $L^{-1}\left\{\dfrac{p+3}{p(p-1)(p+2)}\right\}$.

On sait que: $\dfrac{a}{p^2-a^2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{p-a} - \dfrac{1}{p+a}\right]$

donc

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{p^2-a^2}\right\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\}.$$

$$= \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}$$

$$= \sinh(at).$$

On a aussi:

$$\frac{p+3}{p(p-1)(p+2)} = \frac{-3}{2p} + \frac{4}{3(p-1)} + \frac{1}{6(p+2)}$$

alors,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+3}{p(p-1)(p+2)}\right\} = \frac{-3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}$$

$$= \frac{-3}{2} + \frac{4}{3}e^{x} + \frac{1}{6}e^{-2x}$$

- Calculons aussi $L^{-1}\left\{\dfrac{3p+7}{p^2-2p+5}\right\}$

On sait que:

$$\frac{3p+7}{p^2-2p+5} = \frac{3(p-1)+10}{(p-1)^2+4}$$

$$= \frac{3(p-1)}{(p-1)^2+4} + \frac{10}{(p-1)^2+4}$$

et donc

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3p+7}{p^2-2p+5}\right\} = 3L^{-1}\left\{\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\right\} + 5\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p-1)^2+4}\right\}$$

$$= 3e^{x}\cos(2x) + 5e^{x}\sin(2x).$$

propriété 03

Car: $L\{e^{-\alpha x} f(x)\} = F(p+\alpha) \Rightarrow L^{-1}\{F(p+\alpha)\} = e^{-\alpha x} f(x)$

et $L^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+w^2}\right\} = \cos wt$ $\boxed{w=2}$, $\boxed{\alpha=-1}$

3. Application de la transformée de Laplace dans la résolution des équations différentielles :

Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y_0' \ , \ \ldots \ , \ y^{(n-1)}(0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

Pour déterminer la solution $y = y(x)$, $x \geq 0$,

En prenant la transformée de Laplace.

$$\mathcal{L}\left(a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y\right)(p) = \mathcal{L}\{f\}(p)$$

$\mathcal{L}$ linéaire

$$\Longrightarrow a_0 \mathcal{L}(y^{(n)})(p) + a_1 \mathcal{L}(y^{(n-1)})(p) + \cdots + a_n \mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f)(p)$$

$$\Longrightarrow a_0\left(p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)\right)$$
$$+ a_1\left(p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y(0) - p^{n-3} y'(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)\right)$$
$$+ \cdots + a_{n-1}\left(pY(p) - y(0)\right) + a_n Y(p) = F(p)$$

et donc

$$Y(p) = \frac{F(p) + U(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n}$$

où : $U(p) = a_0\left(p^{n-1} y(0) + p^{n-2} y'(0) + \cdots + p y^{(n-2)}(0) + y^{(n-1)}(0)\right)$
$$+ a_1\left(p^{n-2} y(0) + p^{n-3} y'(0) + \cdots + p y^{(n-3)}(0) + y^{(n-2)}(0)\right)$$
$$+ \cdots + a_{n-1} y(0).$$

La solution $y(x)$ (i.e. l'original de $Y(p)$) s'obtient par la transformée de Laplace inverse.

Exemple :

Résoudre les équations différentielle suivantes :

1. $y'(x) + 3y(x) = 0$, $y(0) = 1$.
2. $y'(x) + 3y(x) = 0$, $y(1) = 1$.
3. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4e^{3x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 9$
4. $y'''(x) - 3y''(x) + 3y' - y = x^2 e^x$, $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 2$.

1. Soit $y'(x) + 3y(x) = 0$, $y(0) = 1$.

$\Rightarrow \mathcal{L}\{y'(x)\} + 3\mathcal{L}\{y(x)\} = 0$

$\Rightarrow pY(p) - y(0) + 3Y(p) = 0$

$\Rightarrow (p+3)Y(p) = y(0) = 1$ alors :

$Y(p) = \frac{1}{p+3} = \mathcal{L}\{e^{-3x}\}$

d'où $y(x) = e^{-3x}$.

② Soit $y'(x) + 3y(x) = 0$, $y(1) = 1$.

De la même manière de l'exemple précédent.

$$Y(P) = \frac{y(0)}{P+3} = y(0) \cdot L\{e^{-3x}\}$$

i.e $y(x) = y(0)\, e^{-3x}$

Puisque $y(1) = 1$ donc $y(0) = e^{3}$.

d'où $y(x) = e^{-3(x-1)}$.

③ $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4e^{3x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 9$.

$$\Rightarrow L\{y''(x)\} - 3L\{y'(x)\} + 2L\{y(x)\} = L\{4e^{3x}\}$$

$$\Rightarrow p^2 Y(P) - y'(0) - p\,y(0) - 3(pY(P) - y(0)) + 2Y(P) = 4 \cdot \frac{1}{P-3}$$

$$\Rightarrow Y(P) \cdot (p^2 - 3p + 2) + (3-p)\,y(0) - y'(0) = \frac{4}{P-3}$$

$$\Rightarrow Y(P)(p^2 - 3p + 2) + 4(3-P) - 9 = \frac{4}{P-3}$$

$$\Rightarrow Y(P) = \frac{4}{(P-3)(P^2-3p+2)} + \frac{9+4(P-3)}{(P^2-3p+2)}$$

$$= \frac{4}{(P-3)(P-1)(P-2)} + \frac{4P-3}{(P-1)(P-2)}$$

$$= \frac{A_1}{P-3} + \frac{A_2}{P-1} + \frac{A_3}{P-2} + \frac{A_4}{P-1} + \frac{A_5}{P-2}$$