Chapitre 4

PRODUIT TENSORIEL ET PRODUIT DE CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS

Dans toute la suite il est préférable que le lecteur soit familiarisé avec les notations et les notions déjà données dans la première partie de ce cours.

4.1 Produit tensoriel des distributions

Soient $\Omega_1,\ \Omega_2$ deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^{n_1},\ \mathbb{R}^{n_2}$.

Définition $4-1$

Pour $u_j \in C^0(\Omega_j),\ j=1,\ 2$, on définit la fonction $u_1 \otimes u_2$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ par

$$(u_1 \otimes u_2)(x,\ y) = u_1(x)u_2(y) \quad , \quad \forall (x,\ y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \ ; \tag{4.1}$$

que l'on lit " u_1 tensoriel u_2".

Alors $u_1 \otimes u_2 \in C^0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et pour $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$ on a

$$\langle u_1 \otimes u_2\ ,\ \varphi\rangle = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} u_1(x)u_2(y)\varphi(x,\ y)dxdy \tag{4.2}$$

d'après le théorème de $Fubini$ on peut déduire que

$$\begin{aligned}\langle u_1 \otimes u_2 \ , \ \varphi \rangle &= \int\limits_{\Omega_1} u_1(x) \left(\int\limits_{\Omega_2} u_2(y)\varphi(x, \ y)dy \right) dx \\ &= \langle u_1 \ , \ \langle u_2 \ , \ \varphi(x, \ .) \rangle \rangle \,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

En particulier si $\varphi(x, \ y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ où $\varphi_j \in D(\Omega_j), \ j = 1, \ 2$, on aura alors :

$$\langle u_1 \otimes u_2 \ , \ \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle u_1 \ , \ \varphi_1 \rangle \langle u_2 \ , \ \varphi_2 \rangle \,. \tag{4.4}$$

On peut, donc, généraliser cette opération aux distributions.

Théorème $4-1$ ($Définition$)

Soit $f_j \in D'(\Omega_j), \ j = 1, \ 2$. Il existe une unique distribution $f \in D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que, pour toute fonction $\varphi_j \in D(\Omega_j) \ \ j = 1, \ 2$, on ait

$$\langle f \ , \ \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle f_1 \ , \ \varphi_1 \rangle \langle f_2 \ , \ \varphi_2 \rangle \,. \tag{4.5}$$

De plus, pour $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$ on a

$$\langle f \ , \ \varphi \rangle = \langle f_1 \ , \ \langle f_2 \ , \ \varphi(x, \ .) \rangle \rangle = \langle f_2 \ , \ \langle f_1 \ , \ \varphi(., \ y) \rangle \rangle \,. \tag{4.6}$$

Si $f_j \in \mathcal{E}'(\Omega_j), \ j = 1, \ 2$, on a les mêmes formules pour $\varphi \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

On note ainsi $f = f_1 \otimes f_2 = f_2 \otimes f_1$ et f s'appelle le produit tensoriel des distributions f_1 et f_2.

Exemples ($et\ remarques$)

(i) Soit $a_j \in \Omega_j, \ j = 1, \ 2$ et $f_j = \delta(x_j - a_j), \ j = 1, \ 2$, alors $f_1 \otimes f_2 = \delta(x - a)$ où $a = (a_1 \ , \ a_2)$.

(ii) Si $f_1 \in D'(\Omega_1)$ et $f_2 \in D'(\Omega_2)$ alors on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f_1 \otimes f_2) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_k}) \otimes f_2 \ , \ \forall k, \ k = \overline{1, n_1} \ ; \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_l}(f_1 \otimes f_2) = f_1 \otimes (\frac{\partial f_2}{\partial y_l}) \ , \ \forall l, \ l = \overline{1, n_2} \ . \tag{4.8}$$

Par exemple, si $H(t)$ désigne la fonction de $Heaviside$ sur $\mathbb{R}$, alors pour $x = (x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}(H(x_1) \otimes H(x_2) \otimes ... \otimes H(x_n)) = \delta_{x_1} \otimes \delta_{x_2} \otimes ... \otimes \delta_{x_n} = \delta(x). \tag{4.9}$$

(iii) Soit $f \in D'(\Omega_1)$ et $g \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$. Soit $\chi \in D(\Omega_2)$, $\chi = 1$ dans un voisinage du support de g. Alors pour $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$ on a $\langle f \otimes g, \ \varphi \rangle = \langle f \otimes g, \ \chi\varphi \rangle$.

En effet

$$\langle f \otimes g, \ \varphi \rangle = \langle f \ , \ \langle g \ , \ \varphi(x, \ .) \rangle \rangle = \langle f \ , \ \langle g \ , \ \chi\varphi(x, \ .) \rangle \rangle = \langle f \otimes g, \ \chi\varphi \rangle \, . \tag{4.10}$$

Ceci montre que l'on peut prolonger $f \otimes g$ aux fonctions $\varphi \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telles que $\chi\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Enonçons maintenant un résultat de densité.

Lemme 4 − 1 (*Densité*)

L'espace des fonctions de la forme

$$\varphi(x, \ y) = \sum_{j=1}^{p} \psi_j \otimes \theta_j(x, \ y) = \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x)\theta_j(y) \tag{4.11}$$

où $\psi_j(x) \in D(\mathbb{R}^{n_1})$ et $\theta_j(y) \in D(\mathbb{R}^{n_2})$, est dense dans $D(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$.

Le produit tensoriel des distributions possède quelques propriétés intéressantes.

Propriété 1 (*Commutativité*)

Le produit tensoriel de deux distributions est commutatif, i.e. pour $f \in D'(\mathbb{R}^{n_1})$ et $g \in D'(\mathbb{R}^{n_2})$ on a

$$f \otimes g = g \otimes f \ . \tag{4.12}$$

Propriété 2 (*Associativité*)

Pour $f(x) \in D'(\mathbb{R}^{n_1})$, $g(y) \in D'(\mathbb{R}^{n_2})$ et $h(z) \in D'(\mathbb{R}^{n_3})$ on a

$$f(x) \otimes [g(y) \otimes h(z)] = [f(x) \otimes g(y)] \otimes h(z). \tag{4.13}$$

Propriété 3 (*Continuité*)

Si $f_k \longrightarrow f$ dans $D'(\mathbb{R}^{n_1})$, quand $k \to +\infty$, et $g \in D'(\mathbb{R}^{n_2})$, alors

$$f_k \otimes g \longrightarrow f \otimes g \text{ ,quand } k \to +\infty \text{ , dans } D'(\mathbb{R}^{n_1+n_2}). \tag{4.14}$$

Propriété 4 (*Support*)

Soient $f(x) \in D'(\mathbb{R}^{n_1})$ et $g(y) \in D'(\mathbb{R}^{n_2})$ alors

$$supp(f \otimes g) = supp(f) \times supp(g). \tag{4.15}$$

4.2 Produit de convolution des distributions

Le produit de convolution de deux fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}^n$, est défini par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \tag{4.16}$$

qui n'a de sens que si l'intégrale (4.16) existe. Par le changement de variable $z = x - y$

il s'ensuit que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)g(z)dz = (g * f)(x) \ , \tag{4.17}$$

c'est-à-dire que le produit de convolution, s'il existe, est par définition commutatif.

Si on suppose de plus que f et g sont continues et que l'une d'elles est à support compact alors le produit de convolution $f * g$ existe et est continu, donc il représente une distribution et on a

$$\begin{aligned}
\langle f * g, \ \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n) && (4.18)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right] \varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(x)dx \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+y)dx \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy \\
&= \langle f(x), \langle g(y), \ \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle f(x) \otimes g(y), \ \varphi(x+y) \rangle \, . && (4.19)
\end{aligned}$$

Ce qui motive la définition de la convolution de deux distributions f et g par

$$\langle f * g, \ \varphi \rangle = \langle f(x) \otimes g(y), \ \varphi(x+y) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \ \varphi(x+y) \rangle \rangle \quad , \ \varphi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{4.20}$$

Mais ici il faut remarquer que cette définition peut ne pas avoir de sens (n'est pas toujours valable) car le support de $\varphi(x+y)$ n'est pas borné. En effet si le support de $\varphi(x)$ est contenu dans

$$\{x \in \mathbb{R}^n \diagup\ |x| \leq a\ ,\ a > 0\}$$

alors le support de $\varphi(x+y)$ est contenu dans la bande infinie

$$\{(x,\ y) \diagup\ |x+y| \leq a\ ,\ a > 0\} \subset \{(x,\ y) \diagup\ |x_i + y_i| \leq a\ ,\ i = 1,\ 2, ..., n\}\,.$$

Donc on peut donner un sens à la définition (4.20) si on suppose que l'une des deux distributions est à support compact. En effet puisque on sait que

$$supp(f\ \otimes g) = supp(f\ ) \times supp(g)$$

alors $supp(f\ \otimes g) \cap supp(\varphi(x+y))$ est un borné pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Par exemple si

$$supp(\varphi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \diagup\ |x| \leq a\ ,\ a > 0\} \quad \text{et} \quad supp(f\ ) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \diagup\ |x| \leq b\ ,\ b > 0\}$$

alors
$$\begin{aligned}[supp(f\ ) \times supp(g)] \cap supp(\varphi(x+y)) &= \{(x,\ y) \diagup\ |x| \leq b\ ,\ |x+y| \leq a\ \} \\ &\subset \{(x,\ y) \diagup\ |x_i| \leq b\ ,\ |x_i + y_i| \leq a\quad ,\quad i = 1,\ 2, ..., n\}\end{aligned}$$

qui est bien un borné.

Alors si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ et soit $\chi \in D(\mathbb{R}^n)$, $\chi(x) = 1$ dans un voisinage du support de f et égale à zéro à l'extérieur d'un voisinage plus large. Alors $\theta(x,\ y) = \chi(x)\varphi(x+y) \in D(\mathbb{R}^{2n})$, pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\langle f * g,\ \varphi\rangle = \langle f\ ,\ \langle g\ ,\ \chi(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f\ ,\ \chi(x)\,\langle g\ ,\ \varphi(x+y)\rangle\rangle \tag{4.21}$$

puisque la valeur de la distribution f dépend de la valeur de la fonction-test φ au voisinage du support de la distribution et n'est pas altérée par un changement de valeurs de φ à l'extérieur de tout voisinage du support de f, c'est-à-dire la définition (4.21) est indépendante du choix de $\chi(x)$ et donc on peut écrire

$$\langle f * g,\ \varphi\rangle \ :\ = \langle f\ ,\ \langle g\ ,\ \varphi(x+y)\rangle\rangle\,. \tag{4.22}$$

Donc on a le résultat suivant :

Théorème 4 − 2

Soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in D'(\mathbb{R}^n)$, alors le produit de convolution $f * g$ donné par (4.22) est une distribution de $D'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve

Pour $\theta(x,\ y)$ et $\chi(x)$, définies plus haut, on a

$$\langle f * g,\ \varphi\rangle = \langle f\ \otimes g\ ,\ \theta(x,\ y)\rangle \quad ,\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{4.23}$$

Puisque le produit tensoriel est une distribution alors le produit de convolution $f * g$ est une application linéaire sur $D(\mathbb{R}^n)$, et il ne reste qu'à montrer que $f * g$ est une application continue sur $D(\mathbb{R}^n)$. Soit $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $D(\mathbb{R}^n)$ alors la suite $\theta_k(x,\ y) = \chi(x)\varphi_k(x+y)$ est une suite de $D(\mathbb{R}^{2n})$ qui converge vers zéro dans $D(\mathbb{R}^{2n})$, d'où

$$\langle f * g,\ \varphi_k\rangle = \langle f\ \otimes g\ ,\ \theta_k(x,\ y)\rangle \to 0\ ,\ k \to +\infty\ ; \tag{4.24}$$

i.e. $f * g$ est application continue sur $D(\mathbb{R}^n)$ et donc $f * g \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple

Montrons que

$$\delta * f = f * \delta = f \tag{4.25}$$

où δ est la distribution delta de *Dirac*.

En effet puisque δ est à support compact alors le produit de convolution $\delta * f$ a bien un sens pour tout $f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ alors d'après la définition (4.22)

$$\langle \delta * f,\ \varphi\rangle = \langle \delta(x),\ \langle f(y)\ ,\ \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f(y)\ ,\ \varphi(y)\rangle \quad ; \tag{4.26}$$

de même on a

$$\langle f * \delta,\ \varphi\rangle = \langle f(x),\ \langle \delta(y)\ ,\ \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f(x)\ ,\ \varphi(x)\rangle\,. \tag{4.27}$$

La convolution possède aussi quelques propriétés semblables à celles du produit tensoriel.

Propriété 1 (*Commutativité*)

Soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ le produit de convolution de f et g, $f * g$, est commutatif i.e.

$$f * g = g * f. \tag{4.28}$$

Propriété 2 (*Support*)

Soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ alors

$$supp(f * g) \subset supp(f) + supp(g). \tag{4.29}$$

Propriété 3 (*Associativité*)

Pour f, g et $h \in D'(\mathbb{R}^n)$ telles que deux d'entre elles au moins sont à support compact. Alors

$$f * [g * h] = [f * g] * h. \tag{4.30}$$

Propriété 4 (*Dérivation*)

Si la convolution $f * g$ existe alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$D^\alpha (f * g) = D^\alpha(f) * g = f * D^\alpha(g). \tag{4.31}$$

Propriété 5 (*Continuité*)

Dans certains cas la convolution est un opérateur continu. Le théorème suivant donne deux cas.

Théorème 4 − 3

(i) Soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $D'(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers g, quand $k \to +\infty$, dans $D'(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$f * g_k \to f * g \ , \text{ quand } k \to +\infty, \text{ dans } D'(\mathbb{R}^n). \tag{4.32}$$

(ii) Soient $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $D'(\mathbb{R}^n)$ à support inclus dans un compact K qui converge vers g dans $D'(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$f * g_k \to f * g \ , \text{ quand } k \to +\infty, \text{ dans } D'(\mathbb{R}^n). \tag{4.33}$$

4.2.1 Régularisation des distributions

La convolution $f * \varphi$ d'une distribution $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ avec une fonction-test $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ transforme cette distribution en une fonction de classe C^∞. Ce procédé est appelé "Régularisation des distributions".

Enonçons d'abord quelques résultats qu'on utilisera par la suite.

Lemme 4 − 2

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $\lambda \in I$, soit une fonction $x \mapsto \varphi(x, \lambda)$ appartenant à $D(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et supposons que cette fonction vérifie :

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\forall \ell = 0, 1, ..., m$, la fonction $(x, \lambda) \mapsto D_x^\alpha D_\lambda^\ell \varphi(x, \lambda)$ existe et est continue sur $\Omega \times I$.

(ii) $\forall \lambda_0 \in I$, $\exists\ \delta > 0$, $\exists\ \mathbf{K} \subset \Omega$ compact tels que $supp(D_\lambda^\ell \varphi(x, \lambda) \subset \mathbf{K}$, pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \delta \ , \ \lambda_0 + \delta]$ et tout $\ell = 0, 1, ..., m$.

Alors pour tout $f \in D'(\Omega)$, la fonction $G(\lambda) = \langle f(x)\ ,\ \varphi(x,\ \lambda)\rangle$ est de classe C^m sur I et on a

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\ell} G(\lambda) = \left\langle f(x)\ ,\ D_{\lambda}^{\ell}\varphi(x,\ \lambda)\right\rangle,\ \ell = 0,\ 1, ...,\ m,\ \forall\lambda \in I. \tag{4.34}$$

Remarque 4 − 1

Dans le cas où f est à support compact la condition (ii) n'est pas nécessaire.

Corollaire 4 − 1

Soient Θ un ouvert de $\mathbb{R}^{n_1}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n_2}$, φ un élément de $D(\Theta \times \Omega)$ et $f \in D'(\Omega)$. Alors

$$\left\langle f(x)\ ,\ \int\limits_{\Theta} \varphi(t,\ x)dt \right\rangle = \int\limits_{\Theta} \langle f(x)\ ,\ \varphi(t,\ x)\rangle\, dt. \tag{4.35}$$

Théorème 4 − 4

Soient $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$, alors $f * \psi$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et on a

$$f * \psi(x) = \langle f(y)\ ,\ \psi(x-y)\rangle \tag{4.36}$$

Preuve

D'après le *lemme* $1-2$ $\langle f(y)\ ,\ \psi(x-y)\rangle$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Montrons maintenant la relation (4.36). En effet

$$\langle f * \psi\ ,\ \varphi\rangle = \langle f(y),\ \langle \psi(z)\ ,\ \varphi(z+y)\rangle\rangle,\quad \text{pour } \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\ ; \tag{4.37}$$

alors

$$\langle f * \psi\ ,\ \varphi\rangle = \left\langle f(y),\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(z)\ \varphi(z+y)dz \right\rangle = \left\langle f(y),\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)\ \varphi(x)dx \right\rangle, \tag{4.38}$$

comme la fonction $(x,\ y) \mapsto \psi(x-y)\ \varphi(x)$ est une fonction de $D(\mathbb{R}^{2n})$, on peut appliquer le *corollaire* $1-1$ et on en déduit alors

$$\langle f * \psi\ ,\ \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle f(y),\ \psi(x-y)\ \varphi(x)\rangle\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle f(y),\ \psi(x-y)\rangle\ \ \varphi(x)dx$$
$$= \langle\langle f(y),\ \psi(x-y)\rangle\ \ ,\ \varphi(x)\rangle\,. \tag{4.39}$$

Maintenant on est en mesure de démontrer le résultat de densité suivant :

Théorème $4-5$

$D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $D'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve

Il faut montrer que pour toute distribution $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ il existe une suite de fonctions-test $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $D'(\mathbb{R}^n)$.

Soit

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp(\dfrac{1}{|x|^2-1}) & \text{si} \quad |x|<1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad |x|\geq 1 \end{cases}\ , \tag{4.40}$$

qui est bien une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$ et soit aussi

$$\eta_k(x) = \frac{k^n\rho(kx)}{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(x)dx}\ . \tag{4.41}$$

Il est facile de vérifier que la suite $\{\eta_k(x)\}$ est une suite de fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers δ (delta de *Dirac*) dans $D'(\mathbb{R}^n)$. Donc si $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, la suite $\{f*\eta_k\}$, des régularisations de f, est dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et par continuité de la convolution (**Théorème $1-3$**) elle converge vers $f*\delta = f$, , quand $k \to +\infty$, dans $D'(\mathbb{R}^n)$.

Puisque les $f * \eta_k$ ne sont pas à support borné, on choisit alors $\psi(x)$ une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$, $\psi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$ et on définit :

$$f_k(x) = \psi(\frac{x}{k})\,[f * \eta_k(x)] \quad , \quad k = 1,\ 2, ... \tag{4.42}$$

qui sont des fonctions à support compact de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i.e. de $D(\mathbb{R}^n)$.

En considérant les $\eta_k(x)$ comme étant des distributions dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ avec les supports contenus dans $|x| \leq \dfrac{1}{k}$, alors pour toute fonction-test φ on a $\psi(\dfrac{x}{k})\varphi(x) = \varphi(x)$ pour k assez grand.

Donc

$$\begin{aligned} \langle f_k(x)\ ,\ \varphi(x)\rangle &= \left\langle \psi(\frac{x}{k})\,[f * \eta_k(x)]\ ,\ \varphi(x)\right\rangle = \left\langle f * \eta_k(x)\ ,\ \psi(\frac{x}{k})\varphi(x)\right\rangle \\ &= \langle f * \eta_k(x)\ ,\ \varphi(x)\rangle \quad \text{pour } k \text{ assez grand ,} \end{aligned} \tag{4.43}$$

et alors $\quad \langle f_k(x)\ ,\ \varphi(x)\rangle \to \langle f * \delta(x)\ ,\ \varphi(x)\rangle = \langle f(x)\ ,\ \varphi(x)\rangle$ quand $k \to +\infty$.

4.2.2 Application aux équations différentielles linéaires

L'une des plus importantes utilisations de la théorie de la convolution est de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante

$$P(D)u = f \tag{4.44}$$

où $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et f est une distribution donnée.

On sait qu'une distribution E telle que $P(D)E = \delta$ est appelée solution élémentaire de l'opérateur différentiel $P(D)$. Donc si E est connue, une solution de l'équation (4.44) est donnée par $E * f$, bien sûr si ce produit de convolution existe. On a alors le résultat suivant :

Théorème 4 − 6

Soit $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ et E une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $P(D)$. Supposons que $E * f$ existe. Alors $u_0 = E * f$ est solution de l'équation (4.44). Si u est une autre solution de l'équation (4.44) alors $u = u_0 + v$ où v est solution de l'équation homogène

$$P(D)v = 0. \tag{4.45}$$

Preuve

En utilisant les propriétés de la convolution on a :

$$P(D)u_0 = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha (E * f) = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha (E) \right] * f = \delta * f = f \ , \tag{4.46}$$

donc $u_0 = E * f$ est solution de l'équation (4.44). En plus pour toute autre solution u de l'équation (4.44) on a

$$P(D)(u - u_0) = 0. \tag{4.47}$$

4.3 Exercices

Exercice 1

Soit $a(x)$ $C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Montrer que

$$a(x) \left[f(x) \otimes g(y) \right] = \left[a(x) f(x) \otimes g(y) \right]$$

où $f(x) \in D'(\mathbb{R}^m)$, $g(y) \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 2

Montrer que pour $f(x) \in D'(\mathbb{R}^m)$, $g(y) \in D'(\mathbb{R}^n)$ on a

$$(f \otimes g)(x+h \ , \ y) = [f(x+h) \otimes g(y)] \quad .$$

Exercice 3

Soit $f(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $g(y) \in D'(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$x^k (f * g) = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (x^j f) * (x^{k-j} g) \quad .$$

Exercice 4

Soit $f(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $g(y) \in D'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ on a

$$e^{a.x}(f * g) = (e^{a.x} f) * (e^{a.x} g) \quad .$$

Exercice 5

Soit pour $k \geq 2$

$$E_k = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} H\ (x) \quad ,$$

1) Montrer que E_k est une solution de l'équation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1} E = H\ (x) \quad .$$

2) Déduire une solution élémentaire de $\left(\frac{d}{dx}\right)^k$ i.e. une solution de l'équation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k E = \delta \quad ; \quad \text{où} \quad \delta \text{ est la distribution delta de Dirac sur } \mathbb{R}.$$

(Ind : $x^p \delta^{(q)} = 0 \quad$ si $\; p > q$).

3) Donner une solution de l'équation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k E = f \quad ; \text{ où } f \text{ est la distribution à support compact sur } \mathbb{R}.$$