المركز الجامعي عبد الحفيظ بو الصوف
معهد العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

2022/2021
رياضيات 2
مسؤول المقياس: أ. حجاج مراد

حل سلسلة تمارين رقم 03

حل التمرين الأول

/1

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x\,,y) \mapsto f\big((x\,,y)\big) = f(x\,,y) = (x+2y\,,2x+y)$$

f تطبيق خطي:

1/ $\forall X\,,\ Y \in\ E : f(X+Y) = f(X) + f(Y)$

2/ $\forall X\ \in\ E\ ,\forall \lambda \in \mathbb{R}\ : f(\lambda X) = \lambda f(X)$

من أجل $X = (x_1\,,y_1)\,, Y = (x_2\,,y_2) \in \mathbb{R}^2$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(X+Y) = f((x_1\,,y_1) + (x_2\,,y_2))$$

$$f(x_1+x_2\,,y_1+y_2) = \big((x_1+x_2) + 2(y_1+y_2)\,,2(x_1+x_2) + (y_1+y_2)\big)$$

$$= (x_1+2y_1\,,2x_1+y_1) + (x_2+2y_2\,,2x_2+y_2)$$

$$= f(X) + f(Y)$$

$$f(\lambda X) = f\big(\lambda(x_1\,,y_1)\big) = f(\lambda x_1\,,\lambda y_1) = (\lambda x_1 + 2\lambda y_1\,,2\lambda x_1 + \lambda y_1)$$

$$= \lambda(x_1+2y_1\,,2x_1+y_1) = \lambda f(X)$$

/ 2

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x\,,y,z) \mapsto f\big((x\,,y,z)\big) = f(x\,,y,z) = (x+1\,,y+z)$$

من أجل $X = (x_1\,,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda X) = f\big(\lambda(x_1\,,y_1,z_1)\big) = f(\lambda x_1\,,\lambda y_1,\lambda z_1) = (\lambda x_1 + 1\,,\lambda y_1 + \lambda z_1)$$

$$\neq \lambda f(X)$$

ومنه fليس تطبيق خطي.

/3

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x\,, y) \mapsto f\big((x\,, y)\big) = f(x\,, y) = xy$$

من أجل $X = (x_1\,, y_1) \in \mathbb{R}^2$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda X) = f\big(\lambda(x_1\,, y_1)\big) = f(\lambda x_1\,, \lambda y_1) = \lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2 xy$$
$$\neq \lambda f(X)$$

ومنه fليس تطبيق خطي.

حل التمرين التاني

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x\,, y\,, z) \mapsto \quad f(x\,, y\,, z) = (2x + 3y\,, x - 2y + z)$$

1/ f تطبيق خطي:

1/ $\forall X\,,\ Y \in E : f(X + Y) = f(X) + f(Y)$

2/ $\forall X \in E\ ,\forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda X) = \lambda f(X)$

من أجل $X = (\ \ {}_1\,, y_1, z_1)\,, Y = (x_2\,, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(X + Y) = f((x_1\,, y_1, z_1) + (x_2\,, y_2, z_2))$$

$$f(x_1 + x_2\,, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2\,)\,, (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2\,) + (z_1 + z_2))$$

$$= (2x_1 + 3y_1\,, x_1 - 2y_1 + z_1) + (2x_2 + 3y_2\,, x_2 - 2y_2 + z_2\,)$$

$$= f(X) + f(Y)$$

$$f(\lambda X) = f\big(\lambda(x_1\,, y_1, z_1)\big) = f(\lambda x_1\,, \lambda y_1\,, \lambda z_1) = (2\lambda x_1 + 3\lambda y_1\,, \lambda x_1 - 2\lambda y_1 + \lambda z_1)$$

$$= \lambda(2x_1 + 3y_1\,, x_1 - 2y_1 + z_1) = \lambda f(X)$$

/2 ايجاد أساس و بعد $\boldsymbol{Kerf}$

$$Kerf = \{(x\,, y\,, z\,) \in \mathbb{R}^3 : f(x\,, y\,, z\,) = 0\}$$

$$Kerf \ni X \Rightarrow f(x\,, y\,, z\,) = 0$$

$$\Rightarrow (2x + 3y\,, x - 2y + z) = (0\,,0\,)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y \\ -\dfrac{3}{2}y - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y \\ z = -\dfrac{7}{2}y \end{cases} \Rightarrow X = \left(-\frac{3}{2}y\,, y\,, -\frac{7}{2}y\right)$$

$$\Rightarrow X = y\underbrace{\left(-\frac{3}{2}\,,1\,, -\frac{7}{2}\right)}_{u_1}$$

و منه $Kerf$ هي الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بـ u_1 و هو غير معدوم فهو مستقل خطيا ويشكل اساس ل $Kerf$ ومنه $dimKerf = 1$

$Kerf \neq \{(0\,,0\,,0\,)\}$ ومنه التطبيق fليس متباين

/3 ايجاد أساس وبعد $\boldsymbol{Imf}$

$$\boldsymbol{Imf} = \{Y \in \mathbb{R}^2 : \exists\, X \in \mathbb{R}^3\,, f(X) = Y\}$$

$$Imf \ni Y \Rightarrow \exists\, X = (x\,, y\,, z\,) \in \mathbb{R}^3 :\; Y = f(X)$$

$$\Rightarrow Y = (2x + 3y\,, x - 2y + z) = x\underbrace{(2\,,1\,)}_{v_1} + y\underbrace{(3\,, -2\,)}_{v_2} + z\underbrace{(0\,,1\,)}_{v_3}$$

و منه Imf هي الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولد بـ الأشعة $v_1\,, v_2\,, v_3$

<u>دراسة الإستقلال الخطي</u>

$v_1\,, v_2\,, v_3$ ليست مستقلة خطيا إذ أن: $v_1 = \frac{2}{3} \quad {}_2 + \frac{7}{3}v_3$

بعد التخلص من الأشعة المسببة للارتباط نجد مثلا $v_3\,, \quad {}_1$ مستقلة خطيا و تبقى مولدة لـ Imf و

$rgf = dimImf = 2 = dim\mathbb{R}^2$ ومنه التطبيق fغامر

/4 التطبيق fليس تقابلي لانه ليس متباين