

المحور الثاني

المصفوفات و التطبيقات الخطية

المحاضرة : 04

ب. التطبيقات الخطية

ب.1- مفهوم التطبيق الخطي

1/ تعريف

- ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و f تطبيق من E نحو F ،

$$f: E \rightarrow F$$

نقول أن f تطبيق خطي إذا حقق

$$1/ \forall X, Y \in E : f(X + Y) = f(X) + f(Y)$$

$$2/ \forall X \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda X) = \lambda f(X)$$

1/ قضية

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \rightarrow F$
 f تطبيق خطي إذا و فقط إذا كان :

$$\forall X, Y \in E, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : f(\lambda X + \beta Y) = \lambda f(X) + \beta f(Y)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{مثال :}$$

$$(x, y) \mapsto f((x, y)) = f(x, y) = (2x, x + y)$$

هو تطبيق خطي:

من أجل $\lambda \in \mathbb{R}$ و $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in E$

$$f(X + Y) = f((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$$

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2))$$

$$= (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2)$$

$$= f(X) + f(Y)$$

$$f(\lambda X) = f(\lambda(x_1, y_1)) = f(\lambda x_1, \lambda y_1) = (2\lambda x_1, \lambda x_1 + \lambda y_1)$$

$$= \lambda(2x_1, x_1 + y_1) = \lambda f(X)$$

2/ قضية

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \rightarrow F$ تطبيق خطي عندئذ:

$$f(0_E) = 0_F$$

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = 2f(0_E) \Rightarrow f(0_E) = 0_F \quad \text{البرهان:}$$

ب. 2- نواة وصورة تطبيق خطي

3/ تعريف

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \rightarrow F$ خطي، نسمي نواة f مجموعة الأشعة من E التي صورها معدومة في F

و نرمز لها بـ $\text{Ker} f$

$$\text{Ker} f = \{X \in E : f(X) = 0_F\} = f^{-1}(0_F)$$

3/ قضية

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \rightarrow F$ خطي، $\text{Ker} f$ هي ف.ش.ج من E

البرهان:

- حسب القضية 2 فإن $0_E \in \text{Ker} f$ و $\text{Ker} f$ مجموعة غير خالية من E

- ليكن $X, Y \in \text{Ker} f$ ، $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ نبرهن أن: $\lambda X + \beta Y \in \text{Ker} f$

$$f(\lambda X + \beta Y) = \lambda f(X) + \beta f(Y)$$

$$= \lambda f(X) + \beta f(Y)$$

$$= \lambda 0_F + \beta 0_F = 0_F$$

4/ تعريف

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \rightarrow F$ خطي، نسمي صورة f مجموعة الأشعة من F التي لها سابقة في E

و نرمز لها بـ $\text{Im} f$

$$\text{Im} f = \{Y \in F : \exists X \in E, f(X) = Y\}$$

5/ قضية

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \rightarrow F$ خطي، $\text{Im} f$ هي ف.ش.ج من F

البرهان:

ليكن $X, Y \in \text{Im} f$ ، $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ نبرهن أن: $\lambda X + \beta Y \in \text{Im} f$

$$X, Y \in \text{Im}f \Rightarrow \exists X', Y' \in E : f(X') = X, f(Y') = Y$$

$$\lambda X + \beta Y = f(\lambda X') + f(\beta Y')$$

$$= f(\lambda X' + \beta Y') \in \text{Im}f$$

6/ تعريف

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \rightarrow F$ خطي، نعرف رتبة f بأنها بعد صورة f و نرمز لها بالرمز $\text{rg}f$

$$\text{rg}f = \dim(\text{Im}f)$$

مثال:

ليكن f التطبيق الخطي المعروف كما يلي

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t) = (x - 2y, 3z - t, 0)$$

أوجد: $\text{Ker}f$ ، $\text{Im}f$ و حدد بعديهما

$$\text{Ker}f \ni X \Rightarrow f(x, y, z, t) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2y, 3z - t, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3z - t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ t = 3z \end{cases} \Rightarrow X = \left(x, \frac{1}{2}x, z, 3z\right)$$

$$\Rightarrow X = \left(x, \frac{1}{2}x, 0, 0\right) + (0, 0, z, 3z)$$

$$= x \underbrace{\left(1, \frac{1}{2}, 0, 0\right)}_{u_1} + z \underbrace{(0, 0, 1, 3)}_{u_2}$$

و منه $\text{Ker}f$ هي الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بـ u_1, u_2 وهما مستقلين خطيا، $\dim \text{Ker}f = 2$

$$\text{Im}f \ni Y \Rightarrow \exists X = (x, y, z, t) \in E : Y = f(X)$$

$$\Rightarrow Y = (x - 2y, 3z - t, 0) = x \underbrace{(1, 0, 0)}_{v_1} + y \underbrace{(-2, 0, 0)}_{v_2} + z \underbrace{(0, 3, 0)}_{v_3} + t \underbrace{(0, -1, 0)}_{v_4}$$

و منه $\text{Im}f$ هي الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالأشعة v_1, v_2, v_3, v_4

دراسة الإستقلال الخطي

$$v_3 = -3v_4 \text{ و } v_2 = -2v_1 \text{ إذ أن: } v_1, v_2, v_3, v_4 \text{ ليست مستقلة خطيا}$$

بعد التخلص من الأشعة المسببة للإرتباط نجد مثلا v_1, v_3 مستقلة خطيا و تبقى مولدة لـ Imf و $rgf = dimImf = 2$

5/ قضية

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \rightarrow F$ خطي عندئذ:

$$1/ \quad f \text{ متباين} \Leftrightarrow Kerf = \{0_E\} \Leftrightarrow dim(Kerf) = 0$$

$$2/ \quad f \text{ غامر} \Leftrightarrow Imf = F \Leftrightarrow dim(Imf) = dimF$$

البرهان:

$$1/ \Rightarrow \text{نفرض أن } f \text{ متباين و } X \in Kerf \text{ إذن } f(X) = 0_F = f(0_E)$$

$$\Leftarrow \text{نفرض أن } Kerf = \{0_E\} \text{ و } X, Y \in E \text{ حيث } f(X) = f(Y) \text{ ، لدينا}$$

$$f(X) = f(Y) \Rightarrow f(X) - f(Y) = 0_F$$

$$\Rightarrow f(X - Y) = 0_F$$

$$\Rightarrow X - Y \in Kerf = \{0_E\}$$

$$\Rightarrow X - Y = 0_E$$

$$\Rightarrow X = Y$$

2/ واضح تعريفا

6/ قضية

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ مع $dimE = n < +\infty$ و $f: E \rightarrow F$ خطي عندئذ:

$$dimKerf + dimImf = dimE$$

7/ نتيجة

ليكن E, F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$ مع $dimE = dimF = n < +\infty$ و $f: E \rightarrow F$ خطي عندئذ:

$$f \text{ متباين} \Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim(\text{Ker} f) = 0 \Leftrightarrow \dim(\text{Im} f) = \dim F \Leftrightarrow \text{Im} f = F \Leftrightarrow f \text{ غامر}$$

مثال :

ليكن f التطبيق الخطي المعروف كما يلي

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (2x, 3x + y, 2x - 3z)$$

برهن أن f تقابلي

$$\text{بما أن } E = F = \mathbb{R}^3 \text{ و } \dim \mathbb{R}^3 < +\infty \text{ فإنه يكفي أن نبرهن أن } \text{Ker} f = \{0\}$$

$$\text{Ker} f \ni X = (x, y, z) \Rightarrow f(X) = 0$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = 0$$

$$\Rightarrow (2x, 3x + y, 2x - 3z) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow X = (0, 0, 0)$$