جمل المعادلات الخطية

المستوى:أولى جامعي

2022/2021

المحتويات

1 جمل معادلات خطية

1.1 جملة معادلات خطية

تعريف

لتكن $n,m \in \mathbb{N}^*$ الجملة الخطية $n \times m$ هي مجموعة مكونة من n معادلة خطية و m مجهول تكتب على الشكل:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

حيث: $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ مع $i = 1,2,..,n$، $j = 1,2,...,m$ و $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}$، $A = (a_{ij}) \in M_{nm}(\mathbb{R})$ تسمى مصفوفة الجملة و رتبتها هي رتبة الجملة، و يسمى الشعاع $B = (b_i)_{i=1,2,...,n}$ الطرف الثاني للجملة.

- عندما يكون الطرف الثاني للجملة معدوم نقول أن الجملة (S) متجانسة و هي تقبل على أقل الحل $(0, 0, , ..., 0)$ الذي يسمى بالحل الصفري أو الحل التافه.
- حل الجملة (S) هو الشعاع $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ الذي يحقق جميع معادلات الجملة (S).
- نقول أن الجملة (S_1) و (S_2) أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس الحلول.

مثال 1

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x_1 - 2x_2 & = & -7 \\ 5x_1 + 4x_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

هي جملة خطية ذات معادلتين
أو نقول أنها جملة خطية ذات معادلتين و مجهولين حقيقيين.

مثال 1
الجملتان التاليتان :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 5 \\ x + 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 3 \\ x - y & = & 1 \end{array}\right.$$

متكافئتان، لأن كليتيهما تقبل حلا وحيدا هو $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

الكتابة المصفوفية للجملة الخطية:

الكتابة المصفوفية للجملة (S):

$$AX = B. \tag{1}$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

حل الجملة (S) يؤول إلى ايجاد الشعاع X حل المعادلة (1).

2 طرق حل جملة معادلات خطية

2.1 طريقة كرامر Cramer

تعريف

نقول عن الجملة (S) أنها جملة كرامر إذا كانت الجملة مربعة و إذا كانت تقبل حلا وحيدا.

مثال

الجملة التالية هي لكرامر :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 5x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

لأنها تقبل حلا وحيدا هو

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مثال

الجملة التالية ليست لكرامر :

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

لأنها تقبل أكثر من حل واحد. مثلا $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ هما حلان مختلفان لهذه الجملة.

مثال

الجملة التالية ليست لكرامر :

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

لأنها لا تقبل حلولا.

نظرية

تكون الجملة المربعة لكرامر إذا و فقط إذا كان : $det(A) \neq 0$

مثال

لقد رأينا أن الجملة التالية هي لكرامر :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 7 \\ 5x_1 - 2x_2 & = & 8 \end{cases}$$

لو حسبنا محدد المصفوفة المرافقة لها لوجدنا : $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -19 \neq 0$

مثال

لقد رأينا أن الجملة التالية ليست لكرامر :

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 & = & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 & = & 2 \end{cases}$$

و عند حساب محدد المصفوفة المرافقة لها نجد: $det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

لتكن الجملة الخطية :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{cases}$$

التي تكتب على الشكل المصفوفي $AX = B$ حيث :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نعرف المصفوفات $A_1, A_2, \cdots, A_n$ بـ :

A_1 هي المصفوفة الناتجة من حذف العمود الأول ل A و استبداله بالشعاع B.

A_2 هي المصفوفة الناتجة من حذف العمود الثاني ل A و استبداله بالشعاع B.

$\vdots$

A_n هي المصفوفة الناتجة من حذف العمودn ل A و استبداله بالشعاع B.

أي :

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

إذا كان محدد المصفوفة A غير معدوم فإن الجملة (S) تملك حل وحيد يعطى بالعلاقة :

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \cdots, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

مثال

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 4x_2 &= -5 \end{cases}$$

لدينا : $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$، و منه للجملة حل وحيد :

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}$$

لدينا : $det(A_1) = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -17, det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -34$ و منه:

$$x_1 = \frac{-17}{-17} = 1, x_2 = \frac{-34}{-17} = 2$$

مثال

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 3x+5y+3z &= 1 \\ 2x+7y-z &= 8 \end{cases}$$

لدينا : $det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=3\neq 0$، و منه للجملة حل وحيد :

$$x=\frac{det(A_1)}{det(A)}, y=\frac{det(A_2)}{det(A)}, z=\frac{det(A_3)}{det(A)}$$

لدينا : $det(A_1)=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}=-87, det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}=33, det(A_3)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}=33$ و منه:

$$x=\frac{-87}{3}=-29; \qquad y=\frac{33}{3}=11; \qquad y=\frac{33}{3}=11$$

2.2 طريقة استعمال مقلوب مصفوفة

لتكن جملة (S) التي شكلها المصفوفي هو $AX=B$ ، نفرض أن $det(A)\neq 0$ و منه بضرب الطرفين في A^{-1} من اليسار نجد : $X=A^{-1}B$.

مثال

حل الجملة

$$\begin{cases} x_1+3x_2 &= 1 \\ -x_1+x_2 &= 5 \end{cases}$$

لدينا : $det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$ و منه المصفوفة A قابلة للقلب و مقلوبها هو $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ إذن :

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

و منه :

$$x_1=\frac{-7}{2}; \qquad x_2=\frac{3}{2}$$

مثال

لتكن المعادلة الخطية التالية :

$$AX=B$$

حيث :

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لدينا :

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

نستنتج إذن أن :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -8 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

أي :

$$x = 2; \qquad y = 3; \qquad z = -4$$

نظرية

لتكن الجملة $AX = B$ ذات m معادلة و n مجهول.

- إذا كان $n = m$ ، تكون المصفوفة A مربعة من الدرجة n و نميز ثلاث حالات :
  1. إذا كان : $rg(A) = n$ أي $det(A) \neq 0$ ، فإن $rg(A) = rg(A|B)$ و الجملة لها حل وحيد.
  2. إذا كان : $rg(A) = rg(A|B) < n$ الجملة تملك مالا نهاية من الحلول.
  3. إذا كان : $rg(A) \neq rg(A|B)$ الجملة لا تملك حلول.
- إذا كان $m > n$ فإننا نميز ثلاث حالات :
  1. إذا كان : $rg(A) = rg(A|B) = n$ فحل الجملة وحيد.
  2. إذا كان : $rg(A) = rg(A|B) < n$ الجملة تملك مالا نهاية من الحلول.
  3. إذا كان : $rg(A) \neq rg(A|B)$ الجملة لا تملك حلول.
- إذا كان $m < n$ فإننا نميز حالتين :
  1. إذا كان : $rg(A) = rg(A|B) \leq m$ الجملة تملك مالا نهاية من الحلول.
  2. إذا كان : $rg(A) \neq rg(A|B)$ الجملة لا تملك حلول.