المحور الثاني

المصفوفات و التطبيقات الخطية

المحاضرة : 04

ب . التطبيقات الخطية

ب.1- مفهوم التطبيق الخطي

1/ تعريف

- ليكن $E\ ,F$ فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و f تطبيق من E نحو F ،

$$f: E \to F$$

نقول أن f تطبيق خطي إذا حقق

$$1/\quad \forall X\ ,\ Y \in\ E : f(X+Y) = f(X) + f(Y)$$

$$2/\quad \forall X\ \in\ E\ ,\forall \lambda \in \mathbb{R}\ : f(\lambda X) = \lambda f(X)$$

1/ قضية

ليكن $E\ ,F$ فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \to F$
f تطبيق خطي إذا و فقط إذا كان :

$$\forall X\ ,Y \in\ E\ ,\forall \lambda\ ,\beta \in \mathbb{R}\ : f(\lambda X + \beta Y) = \lambda f(X) + \beta f(Y)$$

مثال :

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x\ ,y) \mapsto f\big((x\ ,y)\big) = f(x\ ,y) = (2x\ ,x+y)$$

هو تطبيق خطي:

من أجل $X = (x_1\ ,y_1)\ ,Y = (x_2\ ,y_2) \in\ E$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(X+Y) = f((x_1\ ,y_1) + (x_2\ ,y_2))$$

$$f(x_1 + x_2\ ,y_1 + y_2) = \big(2(x_1 + x_2)\ ,(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2\ )\big)$$

$$= (2x_1\ ,x_1 + y_1\ ) = (2x_2\ ,x_2 + y_2\ )$$

$$= f(X) + f(Y)$$

$$f(\lambda X) = f\big(\lambda(x_1\ ,y_1)\big) = f(\lambda x_1\ ,\lambda y_1) = (2\lambda x_1\ ,\lambda x_1 + \lambda y_1)$$

$$= \lambda(2x_1\ ,x_1 + y_1) = \lambda f(X)$$

2/ قضية

ليكن $E\ ,F$ فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f:E\rightarrow F$ تطبيق خطي عند ئذذ:

$$f(0_E)=0_F$$

البرهان: $f(0_E)=f(0_E+0_E)=2f(0_E)\Longrightarrow f(0_E)=0_F$

ب. 2- نواة وصورة تطبيق خطي

3/ تعريف

ليكن $E\ ,F$ فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f:E\rightarrow F$ خطي، نسمي نواة f مجموعة الأشعة من E التي صورها معدومة في F

و نرمز لها بـ $Kerf$

$$Kerf=\{X\in\ E:\ f(X)=0_F\}=f^{-1}(0_F)$$

3/ قضية

ليكن $E\ ,F$ فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f:E\rightarrow F$ خطي، $Kerf$ هي ف.ش.ج من E

البرهان:

- حسب القضية 2 فإن $0_E\in Kerf$ و $Kerf$ مجموعة غير خالية من E
- ليكن $X\ ,Y\in Kerf$ ، $\lambda\ ,\beta\in\mathbb{R}$ نبرهن أن: $\lambda X+\beta Y\in Kerf$

$$f(\lambda X+\beta Y)=\lambda f(X)+\beta f(Y)$$

$$=\lambda f(X)+\beta f(Y)$$

$$=\lambda 0_F+\beta 0_F=0_F$$

4/ تعريف

ليكن $E\ ,F$ فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f:E\rightarrow F$ خطي، نسمي صورة f مجموعة الأشعة من F التي لها سابقة في E

و نرمز لها بـ. Imf

$$Imf=\{Y\in\ F:\exists\ X\in E\ ,f(X)=Y\}$$

5/ قضية

ليكن $E\ ,F$ فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f:E\rightarrow F$ خطي، Imf هي ف.ش.ج من F

البرهان:

ليكن $X\ ,Y\in Imf$ ، $\lambda\ ,\beta\in\mathbb{R}$ نبرهن أن: $\lambda X+\beta Y=\lambda f(X)+\beta f(Y)\in Imf$

$$X , Y \in Imf \Rightarrow \exists X' , Y' \in E : f(X') = X , f(Y') = Y$$
$$\lambda X + \beta Y = f(\lambda X') + f(\beta Y')$$
$$= f(\lambda X' + \beta Y') \in Imf$$

6/ تعريف

ليكن E , F فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \to F$ خطي، نعرف رتبة f بأنها بعد صورة f و نرمز لها بالرمز rgf

$$rgf = dim(Imf)$$

مثال:

ليكن f التطبيق الخطي المعرف كما يلي

$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x , y , z , t) \mapsto f(x , y , z , t) = (x - 2y \ , 3z - t , 0)$$

أوجد: $Kerf$ ، Imf و حدد بعديهما

$$Kerf \ni X \Rightarrow f(x , y , z , t) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2y , 3z - t , 0) = (0 , 0 , 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3z - t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ t = 3z \end{cases} \Rightarrow X = \left(x , \frac{1}{2}x , z , 3z\right)$$

$$\Rightarrow X = \left(x , \frac{1}{2}x , 0 , 0\right) + (0 , 0 , z , 3z)$$

$$= x \underbrace{\left(1 , \frac{1}{2} , 0 , 0\right)}_{u_1} + z \underbrace{(0 , 0 , 1 , 3)}_{u_2}$$

و منه $Kerf$ هي الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بـ u_1 , u_2 و هما مستقلين خطيا، $dimKerf = 2$

$$Imf \ni Y \Rightarrow \exists X = (x , y , z , t) \in E : Y = f(X)$$

$$\Rightarrow Y = (x - 2y , 3z - t , 0) = x \underbrace{(1 , 0 , 0)}_{v_1} + y \underbrace{(-2 , 0 , 0)}_{v_2} + z \underbrace{(0 , 3 , 0)}_{v_3} + t \underbrace{(0 \ , -1 , 0)}_{v_4}$$

و منه Imf هي الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بـ الأشعة v_1 , v_2 , v_3 , v_4

دراسة الإستقلال الخطي

v_1 , v_2 , v_3 , v_4 ليست مستقلة خطيا إذ أن: $v_2 = -2v_1$ و $v_3 = -3v_4$

بعد التخلص من الأشعة المسببة للإرتباط نجد مثلا $v_1 \ , v_3$ مستقلة خطيا و تبقى مولدة لـ Imf و $rgf = dimImf = 2$

5/ قضية

ليكن E , F فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ و $f: E \to F$ خطي عندئذ:

1/ f متباين $\Leftrightarrow Kerf = \{0_E\} \Leftrightarrow dim(Kerf) = 0$

2/ f غامر $\Leftrightarrow Imf = F \Leftrightarrow dim(Imf) = dimF$

البرهان:

1/ $\Longrightarrow$ نفرض أن f متباين و $X \in Kerf$ إذن $f(X) = 0_F = f(0_E)$

$\Longleftarrow$ نفرض أن $Kerf = \{0_E\}$ و $X , Y \in E$ حيث $f(X) = f(Y)$ ، لدينا

$$\begin{aligned} f(X) = f(Y) &\Longrightarrow f(X) - f(Y) = 0_F \\ &\Longrightarrow f(X-Y) = 0_F \\ &\Longrightarrow X - Y \in Kerf = \{0_E\} \\ &\Longrightarrow X - Y = 0_E \\ &\Longrightarrow X = Y \end{aligned}$$

2/ واضح تعريفا

6/ قضية

ليكن E , F فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ مع $dimE = n < +\infty$ و $f: E \to F$ خطي عندئذ:

$$dimKerf + dimImf = dimE$$

7/ نتيجة

ليكن E , F فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$ مع $dimE = dimF = n < +\infty$ و $f: E \to F$ خطي عندئذ:

fتقابل $\Leftrightarrow$ fغامر $\Leftrightarrow Imf = F \Leftrightarrow dim(Imf) = dimF \Leftrightarrow dim(Kerf) = 0 \Leftrightarrow Kerf = \{0_E\} \Leftrightarrow f$متباين

مثال :

ليكن f التطبيق الخطي المعرف كما يلي

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x , y , z) \mapsto f(x , y , z) = (2x ,3x + y , 2x - 3z)$$

برهن أن f تقابلي

بما أن $E = F = \mathbb{R}^3$ و $dim\mathbb{R}^3 < +\infty$ فإنه يكفي أن نبرهن أن $Kerf = \{0\}$

$$Kerf \ni X = (x , y , z) \Rightarrow f(X) = 0$$

$$\Rightarrow f(x , y , z) = 0$$

$$\Rightarrow (2x ,3x + y , 2x - 3z) = (0 ,0 ,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow X = (0 ,0 ,0)$$