حل سلسلة تمارين رقم 01

حل التمرين الأول

-1

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}\ ،\ B=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}\ ،\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 3 & 4\\ -2 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$2A+B=2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 6 & 10 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 7 & 2\\ 6 & 11 & -12\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 3 & 4\\ -2 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 6\\ -4 & -19 & -10\end{pmatrix}$$

$${}^tA=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix},\quad {}^tC=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ 0 & 3 & 6\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix},\quad {}^t(AC)=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ 2 & -19\\ 6 & -10\end{pmatrix}$$

$${}^tC\ {}^tA=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ 2 & -19\\ 6 & -10\end{pmatrix},$$

$$C^2=C.C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 3 & 4\\ -2 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 3 & 4\\ -2 & 6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 12 & 20\\ -14 & 25 & 34\\ -38 & 60 & 101\end{pmatrix}$$

2إيجاد المصفوفتين E و D حيث

$$\begin{cases}D-E=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\dots\dots\dots(1)\\ D+2E=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}\dots\dots\dots\dots(2)\end{cases}$$

$$(2)-(1)\Rightarrow 3E=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow E=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$(1) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>حل التمرين الثاني</u>

تعطى المصفوفتين A , B حيث:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ، } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1 -

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

إذن $A.A = I_3$ ومنه نستنتج أن أن مقلوب A هو A نفسها أي: $A^{-1} = A$

2 حساب المصفوفتين B^2 و $B^2 + B$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2I_3$$

لدينا $B^2 + B = 2I_3 \Rightarrow B.\frac{1}{2}.[(B + I_3)] = I_3$

و منه B قابلة للقلب و مقلوبها هي $\frac{1}{2}.[(B + I_3)]$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}.[(B + I_3)]$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}.\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

حل التمرين الثالث

1

$$M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\ ,M^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\ ,\qquad M^3=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{pmatrix}\ ,\qquad M^4=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&1&0\\8&0&8\end{pmatrix}$$

2 تخمين المصفوفة M^n

من الحساب نخمن أن

$$M^n=\left(m^n{}_{i,j}\right)_{1\le i,j\le 3}\epsilon\mathcal{M}_3\ avec\ \ m_{i,j}=\begin{cases}2^{n-1} & si\ \ i+j\ \ et\ \ pair\ et\ (i\,,j)\neq(2\,,2)\\ 1 & si\ \ (i\,,j)\neq(2\,,2)\\ 0 & si\ \ i+j\ \ est\ impair\end{cases}$$

نفرض أن M^n معطاة بالصيغة السابقة و نبرهن أن

$$M^{n+1}=\left(m^{n+1}{}_{i,j}\right)_{1\le i,j\le 3}\epsilon\mathcal{M}_3\ avec\ \ m_{i,j}=\begin{cases}2^{n} & si\ \ i+j\ \ et\ \ pair\ et\ (i\,,j)\neq(2\,,2)\\ 1 & si\ \ (i\,,j)\neq(2\,,2)\\ 0 & si\ \ i+j\ \ est\ impair\end{cases}$$

$$M^{n+1}=M^nM=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n}&0&2^{n}\\0&1&0\\2^{n}&0&2^{n}\end{pmatrix}$$

و هي نفس الصيغة المخمنة