المحور الثاني

المصفوفات و التطبيقات الخطية

المحاضرة : 03

أ. المصفوفات

أ.1- *مفاهيم حول المصفوفات*

1/ تعريف

- ليكن $n\,,m \in \mathbb{N}^*$ نسمي **مصفوفة** من النوع $n \times m$ ذات معاملات في $\mathbb{R}$ كل جدول ذو n سطر و m عمود من الأعداد الحقيقية

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \dots\dots\dots & a_{1\,m} \\ a_{2\,1} & a_{22} \dots\dots\dots & a_{2\,m} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} \dots\dots\dots & a_{3\,m} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n\,1} & a_{n\,1} \dots\dots\dots & a_{n\,m} \end{pmatrix}$$

ونكتب $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ مجموعة المصفوفات ذات n سطر و m عمود

نرمز بـ $a_{i\,j}$ للعدد الموجود في السطر رقم i و العمود رقم j من A

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}\,, a_{1\,1} = 2\ \,, a_{1\,3} = 3\,, a_{2\,3} = -2$$

$$B = (4\,, -3\,,\ 1) \in \mathcal{M}_{1\times 3} \quad , \ C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}$$

- لتكن $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ ، نسمي **منقول** المصفوفة A المصفوفة من $\mathcal{M}_{m\times n}$ التي نرمز لها بـ ${}^{t}A$ حيث :

$$\boldsymbol{{}^{t}a_{i\,j} = a_{j\,i}}\ \,, \forall\, i{:}\,1 \dots n\,, \forall\, j{:}\,1 \dots m$$

مثال :

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}\ , \qquad {}^{t}B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}$$

2/ مصفوفات خاصة

لتكن $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$

- نقول عن A أنها مصفوفة **مربعة** إذاكان عدد أسطرها مساو لعدد أعمدتها ، أي $\boldsymbol{n = m}$
في هذه الحالة الشعاع $(\boldsymbol{a_{1\,1}\,, a_{2\,2}\,, a_{3\,3}\,, \dots, a_{n\,n}})$ يسمى **بالقطر الرئيسي** لـ A ، ومجموع عناصره يسمى **أثر** $\boldsymbol{A}$ و نكتب

$$\boldsymbol{trA} = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i} \quad ، \quad \boldsymbol{diagA} = (a_{1\,1}, a_{2\,2}, a_{3\,3}, \dots, a_{n\,n})$$

مجموعة المصفوفات المربعة ذات n سطر و n عمود نرمز لها إختصارا بـ $\mathcal{M}_n$

مثال $D = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2} & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -\sqrt{2} & 3 & -5 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من $\mathcal{M}_3$ ، $diagD = (5, 2, -5)$ ، $trD = 5 + 2 - 5 = 2$

- نقول عن A أنها مصفوفة **صفرية أو معدومة** إذا كان جميع عناصرها معدومة أي :

$$a_{i\,j} = 0 \ , \forall\, i: 1 \dots n \ , \forall\, j: 1 \dots m$$

يتضح من التعريف أن المصفوفة الصفرية هي العنصر الحيادي بالنسبة إلى عملية جمع المصفوفات

- نقول عن المصفوفة المربعة A أنها **مثلثية عليا** إذا كان جميع عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة ، أي :

$$a_{i\,j} = 0 \ , \forall\, i > j \quad , i, j : 1 \dots n$$

مثال : المصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ مثلثية عليا

- نقول عن المصفوفة المربعة A أنها **مثلثية سفلى** إذا كان جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة ، أي :

$$a_{i\,j} = 0 \ , \forall\, i < j \quad , i, j : 1 \dots n$$

مثال : المصفوفة $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ مثلثية سفلى

- و نقول عن المصفوفة المربعة A أنها **قطرية** إذا كان جميع عناصرها الواقعة فوق و تحت القطر الرئيسي معدومة ، أي :

$$a_{i\,j} = 0 \ , \forall\, i \neq j \quad , i, j : 1 \dots n$$

مثال : المصفوفة $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ قطرية

- و نقول عن المصفوفة المربعة A أنها **مصفوفة الوحدة** في $\mathcal{M}_n$. و نرمز لها بالرمز I_n إذا كانت قطرية و جميع عناصر ا قطرها الرئيسي مساوية للواحد أي :

$$I_n = \begin{cases} a_{i\,j} = 0 \ , \forall\, i \neq j \quad , i, j : 1 \dots n \\ \text{و} \\ a_{i\,j} = 1 \ , \forall\, i = j \quad , i, j : 1 \dots n \end{cases}$$

مثال : المصفوفة $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة الوحدة في $\mathcal{M}_3$

- نقول عن المصفوفة المربعة A أنها **متناظرة** إذا كان $^{t}A = A$ أي :

$$a_{j\ i} = a_{i\ j}\ ,\forall\ i \neq\ j\ \ ,i\ ,j\ :1 \ldots n$$

مثال: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة متناظرة

- كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة متناظرة

أ.2 - *عمليات على المصفوفات*

1/ تعريف

ليكن $A\ ,B$ مصفوفتين من $\mathcal{M}_{n\ \times m}$ نعرف **مجموع المصفوفتين** B و A بالمصفوفة C حيث

$$\boldsymbol{c_{i\ j}} = \boldsymbol{a_{i\ j}} + \boldsymbol{b_{i\ j}}\ \ ,\forall\ i{:}\ 1 \ldots n\ ,\forall\ j{:}\ 1 \ldots m$$

مثال : $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

، $A + B = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

2/ تعريف

لتكن Aمصفوفة من $\mathcal{M}_{n\ \times m}$ نعرف **جداء المصفوفة** A **بالسلمي** λ المصفوفة C حيث

$$\boldsymbol{c_{i\ j}} = \lambda\boldsymbol{a_{i\ j}}\ \ ,\forall\ i{:}\ 1 \ldots n\ ,\forall\ j{:}\ 1 \ldots m$$

مثال: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\lambda = 3$ ، $3A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 9 \\ 6 & 12 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3/ تعريف

لتكن Aمصفوفة من $\mathcal{M}_{m\ \times k}$ و B مصفوفة من $\mathcal{M}_{k\ \times m}$ نعرف **جداء المصفوفة** A **بالمصفوفة** $\boldsymbol{B}$ بهذا الترتيب بالمصفوفة C حيث

$$c_{i\ j} = \sum_{l = 1}^{k}{a_{i\ l}b_{l\ k}}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ، } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$c_{i\ j}$: هو السطر رقم $\boldsymbol{i}$ لـ A مضروب في العمود رقم $\boldsymbol{j}$ لـ B

$c_{1\,1} = 5.3 + 1.5 + 3.1 = 23$, $c_{12} = 5.1 + 1.2 + 3.0 = 7$

و هكذا ... لنجد:

$$AB = \begin{pmatrix} 23 & 7 & 25 \\ 26 & 10 & 4 \\ -2 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

- ملاحظة :
  - حسب التعريف فإنه حتى يكون الجداء AB ممكنا لا بد أن يكون عدد أعمدة A مساو لعدد أسطر B
  - جداء المصفوفات عموما ليس تبديلي، فعلى سبيل المثال
  - $BA = \begin{pmatrix} 25 & 1 & 11 \\ 29 & 13 & 15 \\ 25 & -14 & 8 \end{pmatrix}$

4/ قضية

لتكن I_n مصفوفة الوحدة في. $\mathcal{M}_n$ عند ئذ يكون :

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n : AI_n = I_nA = A$$

معنى ذالك أن I_n هي العنصر الحيادي في $\mathcal{M}_n$ بالنسبة إلى عملية جداء المصفوفات

البرهان:

$$(AI_n)_{i\,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{i\,l}(I_n)_{l\,j} = a_{ij} \quad , \ \left((I_n)_{l\,j} = 0 \quad si \quad i \neq j\right) \qquad ,$$

5/ قضية

لتكن A , B مصفوفتين في $\mathcal{M}_n$ و $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ عند ئذ

1/ $\ {}^{t}\left({}^{t}A\right) = A$

2/ $\ {}^{t}(\lambda \mathrm{A}) = \lambda\ {}^{t}A$

3/ $\ {}^{t}(A + B) = {}^{t}A + {}^{t}B$

4/ $\ {}^{t}(AB) = {}^{t}B\ {}^{t}A$

6/ تعريف

لتكن I_n مصفوفة الوحدة في. $\mathcal{M}_n$ و A مصفوفة من $\mathcal{M}_n$ نقول أن A **قابلة للقلب** (أو قابلة للعكس) إذا وجدت مصفوفة B من $\mathcal{M}_n$ حيث: $\qquad AB = BA = I_n$

. نرمز لـ B بالرمز A^{-1} و نسميها مقلوب (المصفوفة العكسية لـ A)

مثال: لتكن $A=\begin{pmatrix}2&4&1\\2&5&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ تأكد أن $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-1&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$

7/ قضية

لتكن $A\,,B$ مصفوفتين قابلتين للقلب في $\mathcal{M}_n$ و $\lambda \epsilon \boldsymbol{R}^*$ عند ئذ

1/ $(A^{-1})^{-1}=A$

2/ $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}.A^{-1}$

2/ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3/ ${}^{t}(A^{-1})=\left({}^{t}A\right)^{-1}$