المحور الأول

الفضاءات الشعاعية

المحاضرة : 02

ب . الفضاءات الشعاعية الجزئية

ب.1- الفضاء الشعاعي الجزئي

1/ تعريف

ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و G مجموعة غير خالية من E نقول أن G هو فضاء شعاعي جزئي من E إذا كان G المزود بنفس العمليتين أي $(E,+,.)$ هو الآخر فضاء شعاعي

2/ قضية

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و G مجموعة غير خالية من E ، عند ئذ يكون G فضاء شعاعي جزئي من E إذا وفقط إذا حقق الشروط :

1/ $\forall\ X,Y \in G:\ X+Y \in G.$ الإستقرار بالنسبة إلى العملية الأولى

2/ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall\ X \in G: \lambda X \in G$ الإستقرار بالنسبة إلى العملية الثانية

3/ قضية

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و G مجموعة غير خالية من E ، عند ئذ يكون G فضاء شعاعي جزئي من E إذا وفقط إذا حقق الشروط :

1/ $\forall\ X,Y \in G:\ X+Y \in G.$ الإستقرار بالنسبة إلى العملية الأولى

2/ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall\ X \in G: \lambda X \in G$ الإستقرار بالنسبة إلى العملية الثانية

4/ قضية

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و G مجموعة غير خالية من E ، عند ئذ يكون: G فضاء شعاعي جزئي من E إذا وفقط إذا حقق الشرط :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall\ X, Y \in G: \lambda X - \mu Y \in G$$

البرهان :

$(\Leftarrow)$ ليكن $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $X, Y \in G$ إذن : $(-\mu) \in \mathbb{R}$ و

$$\begin{cases} \lambda X \in G \\ -\mu Y \in G \end{cases} \Longrightarrow \lambda X - \mu Y \in G$$

$(\Rightarrow)$

ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ و $X, Y \in G$ من أجل $\mu = 0$ في القضية 4 فإن: $\lambda X \in G$ ، و من أجل $\mu = \lambda = 1$ فإن: $X + Y \in G$

أمثلة :

. مجموعة كثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي m هي فضاء شعاعي جزئي من فضاء كثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي n حيث $m \leq n$

. مجموعة الدوال الزوجية و كذا مجموعة الدوال الفردية المعرفة على مجموعة ما من $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة للصفر هما فضائين شعاعيين جزئيين من فضاء الدوال المعرفة على نفس المجموعة

. مجموعة السلاسل المتقاربة هي فضاء شعاعي جزئي من فضاء السلاسل

. لنأخذ من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ المجموعة الغير خالية $E = \{(x, y, o) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x\}$

E هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$: ليكن $X_1 = (x_1, y_1, o) \epsilon E$ $X_2 = (x_2, y_2, o)$ إذن :

$y_2 = 2x_2$ و $y_1 = 2x_1$ لدينا من أجل $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda X - \mu Y = (\lambda x_1 - \mu x_2, \lambda y_1 - \mu y_2, o)$$

مع $\lambda y_1 - \mu y_2 = 2(\lambda x_1 - \mu x_2)$

و منه $\lambda X - \mu Y \epsilon E$

ب2 . عمليات على الفضاءات الشعاعية الجزئية

1/ قضية

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و G, H فضائين شعاعيين جزئيين من E ، عند ئذ يكون: $G \cap H$ فضاء شعاعي جزئي من E

البرهان :

كون G, H فضائين شعاعيين جزئيين من E فإن كلاهما يحوي على الأقل العنصر الحيادي ما يجعل تقاطعهما غير خالي

ليكن $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $X, Y \in G \cap H$ إذن : $X, Y \in G$ و $X, Y \in H$

$$\begin{cases} X, Y \in G \\ \text{و} \\ X, Y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda X - \mu Y \in G \\ \text{و} \\ \lambda X - \mu Y \in H \end{cases} \Rightarrow \lambda X - \mu Y \in G \cap H$$

2/ ملاحظة :

إتحاد فضاءائين شعاعيين جزئيين ليس بالضرورة فضاء شعاعي جزئي فعلى سبيل المثال إذا أخذنا من $\mathbb{R}^3$ الفضائين الشعاعيين الجزئيين E_1 و E_2 حيث

$$E_1 = \{(x, y, o) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x\}, E_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2y\}$$

ف : $X = (1, 2, 0) \in E_1$ و $Y = (0, 1, 2) \in E_2$ لكن $X + Y = (1, 3, 2) \notin E_1 \cup E_2$

3/ تعريف :

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و H , G فضائين شعاعيين جزئيين من E نسمي مجموع الفضائين الشعاعين الجزئيين H و G المجموعة المرموز لها بـ $H+G$ حيث

$$H+G=\{h+g : h\in H \; et \; g\in G\}$$

4/ قضية :

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و H , G فضائين شعاعيين جزئيين من E إن المجموعة $H+G$ هي فضاء شعاعي جزئي من E

البرهان :

ليكن λ , $\mu \in \mathbb{R}$ و $X, Y \in H+G$ إذن :

$$\begin{cases} \boldsymbol{X=h_1+g_1} : \boldsymbol{h_1}\in H, \boldsymbol{g_1}\in G \\ \boldsymbol{Y=h_2+g_2} : \boldsymbol{h_2}\in H, \boldsymbol{g_2}\in G \end{cases}$$

لدينا

$$\begin{aligned} X+Y &= (\boldsymbol{h_1+g_1})+(\boldsymbol{h_2+g_2}) \\ &= (\boldsymbol{h_1+h_2})+(\boldsymbol{g_1+g_2})\in H+G \\ \lambda X &= \lambda \boldsymbol{h_1}+\lambda \boldsymbol{g_1}\in H+G \end{aligned}$$

5/ تعريف :

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و H , G فضائين شعاعيين جزئيين من E نقول أن E هو جمع مباشر للفضائين H و G إذا كان :

1/ $E=H+G$

2/ $H\cap G=\{e\}$

و نكتب : $E=H\oplus G$

6/ قضية :

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و H , G فضائين شعاعيين جزئيين من E حيث $E=H\oplus G$ إذن :

$$\forall X\in E : \exists!\ h\in H, \exists!\ g\in G \quad /X=h+g$$

مثال :

$$E_1 = \{(x\,,y\,,0) : x,y \in \mathbb{R}\} \quad , \quad E_2 = \{(0\,,0\,,z) : z \in \mathbb{R}\} \qquad \text{حيث} \quad \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$$

7/ تعريف :

ليكن $H\,,G$ فضاء شعاعيين على $\mathbb{R}$ (ليس بالضرورة أن يكونا مزودين بنفس العمليتين) نسمي جداء ديكارتي لـ H و G بهذا الترتيب المجموعة التي نرمز لها بالرمز $H \times G$ حيث :

$$H \times G = \{(h\,,g) : \ h \in H \ et \ g \in G\}$$

8/ قضية :

ليكن $H\,,G$ فضاء شعاعيين على $\mathbb{R}$ إن $H \times G$ هو فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$

البرهان : (تمرين منزلي)

مثال :

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 = \left\{(X\,,Y) : \ X \in \mathbb{R}^2 \ et \ Y \in \mathbb{R}^3\right\}$$

$$= \left\{\left((x_1\,,x_2)\,,(y_1\,,y_2\,,y_3)\right) : \ x_1\,,x_2\,,y_1\,,y_2\,,y_3 \in \mathbb{R}\right\} \approx \mathbb{R}^5$$

جـ. قاعدة (أساس) فضاء شعاعي

1/ تعريف :

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ أشعة من E نسمي عبارة خطية أو مزج خطي بهذه الأشعة كل عبارة على الشكل :

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n \ \in \mathbb{R} \ \text{حيث :} \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \cdots + \lambda_n X_n$$

2/ تعريف :

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ أشعة من E نقول أن هذه الأشعة هي أشعة مولدة لـ E إذا كان كل شعاع من E يكتب على شكل عبارة خطية بواسطة هذه الأشعة. أي :

$$\forall\, X \ \in E\,, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n \ \in \ \mathbb{R} \ : X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \cdots + \lambda_n X_n$$

مثال :

نستخرج أشعة مولدة لـ $\mathbb{R}^2$

$$X \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow X = (x\,,y) : x,y \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow X = (x\,,0) + (0\,,y) = x\underbrace{(1\,,0)}_{e_1} + y\underbrace{(0\,,1)}_{e_2}$$

إذن : e_1 و e_2 يولدان E

3/ تعريف :

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ أشعة من E نقول أن هذه الأشعة هي أشعة مستقلة خطيا في E إذا إستحال إيجاد مزج خطي معدوم بواسطة هذه الأشعة إلا كانت جميع المعاملات $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ معدومة .أي:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n \in \mathbb{R} :$$
$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \cdots + \lambda_n X_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$$

4/ تعريف :

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ أشعة من E نقول عن هذه الأشعة أنها قاعدة (أساس) لـ E إذا كان

1/ الأشعة $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ تولد E

2/ الأشعة $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ مستقلة خطيا في E

في هذه الحالة عدد أشعة القاعدة نسميه بعد E و نرمز له بـ $dim\ E$

أمثلة :

. نحاول إيجاد لـ $\mathbb{R}^3$

$$X \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow X = (x\,,y\,,z) : x,y\,,z \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow X = (x\,,0\,,0) + (0\,,y\,,0) + (0\,,0\,,z) = x\underbrace{(1\,,0\,,0)}_{e_1} + y\underbrace{(0\,,1\,,0)}_{e_2} + z\underbrace{(0\,,0\,,1)}_{e_3}$$

إذن : $e_1\,, e_2\,, e_3$ أشعة مولدة لـ $\mathbb{R}^3$

<u>الإستقلال الخطي</u> : ليكن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ حيث $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$

أي $\lambda_1(1\,,0\,,0) + \lambda_2(0\,,1\,,0) + \lambda_3(0\,,0\,,1) = (0\,,0\,,0)$

ومنه $(\lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3) = (0\,,0\,,0)$

إذن : $e_1\,, e_2\,, e_3$ أشعة مستقلة في E و هي قاعد لـ $\mathbb{R}^3$ و $dimE = 3$

و بنفس الطريقة نجد الأشعة $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ هي قاعدة لـ $\mathbb{R}^n$ حيث e_i هو الشعاع ذو الإحداثية رقم i مساوية للواحد و بقية الإحداثيات معدومة

. لنحاول إيجاد أساس للفضاء $E = \{(x\,, y\,, z\,. t)\ :\ y = 2x\,,\ z = 3t\}$ و هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^4$

$$E \ni X = (x\,, y\,, z\,. t)\ :\ y = 2x\,, \qquad z = 3t$$

$$= \left(x\,, 2x\,, z\,, \frac{1}{3}z\right)$$

$$= (x\,, 2x\,, 0\,.0) + \left(0\,, 0, z\,, \frac{1}{3}z\right)$$

$$= x\underbrace{(1\,, 2\,, 0\,.0)}_{u_1} + z\underbrace{\left(0\,, 0, 1\,, \frac{1}{3}\right)}_{u_2}$$

إذن u_1 و u_2 يولدان E

<u>الإستقلال الخطي</u> : ليكن $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ حيث $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$

أي $\lambda_1(1\,, 2\,, 0\,, 0) + \lambda_2\left(0\,, 0, 1\,, \frac{1}{3}\right) = (0\,, 0\,, 0\,, 0)$

ومنه $\left(\lambda_1\,, 2\lambda_1\,, \lambda_2\,, \frac{1}{3}\lambda_2\right) = (0\,, 0\,, 0\,, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{1}{3}\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

إذن u_1 و u_2 مستقلين خطيا وهما قاعدة لـ E و $dimE = 2$

5 / قضية:

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و $H\,, G$ فضائين شعاعيين جزئيين من E عند ئذ:

1) $dimH \leq dimE$

2) $dimH = dimE \ \Rightarrow\ H = G$

3) $dim(H + G) = dimH + dimG - dim(H \cap G)$

5 / قضية:

ليكن $H\,, G$ فضائين شعاعيين عند ئذ:

$dim(H \times G) = dimH + dimG$