المركز الجامعي عبد الحفيظ بو الصوف
معهد العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

2022/2021
رياضيات 2
مسؤول المقياس: أ. حجاج مراد

حل سلسلة تمارين رقم 01

حل التمرين الأول

$$\boldsymbol{A = \{(a, b, 0)./\ a, b \in \mathbb{R}\}}$$

ليكن $X = (a_1, b_1, 0), Y = (a_2, b_2, 0) \epsilon A, \lambda \epsilon \mathbb{R}$ ، لدينا

ش1 $X + Y = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0) \epsilon A$

ش2 $\lambda X = (\lambda a_1, \lambda b_1, 0) \epsilon A$

ومنه A هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{B = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0\}}$$

ليكن $X = (a_1, b_1, c_1), Y = (a_2, b_2, c_2) \epsilon B, \lambda \epsilon \mathbb{R}$ ، لدينا : $a_1 + b_1 + c_1$=0 و $a_2 + b_2 + c_2$=0

ش1 $X + Y = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$

مع : $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0$

ومنه : $X + Y \epsilon B$

ش2 $\lambda X = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1)$ مع $\lambda a_1 + \lambda b_1 + \lambda c_1 = \lambda(a_1 + b_1 + c_1) = 0$

إذن : $\lambda X \epsilon B$

و في الأخير نستنتج أن B هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{C = \{(a, b, 1)./\ a, b \in \mathbb{R}\}}$$

ليكن $X = (a\ \ , b\ \ , c\ \ ) \epsilon B$ ، من أجل $\lambda = 2$ لدينا $\lambda X = (2a_1, 2b_1, 2) \notin B$ ، و منه ش2 غير محقق و B ليس فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{D = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 :\ a \geq 0\}}$$

من أجل $X = (2,-3,2) \epsilon D$ ، و من أجل $\lambda = -1$ لدينا $\lambda X = (-2,3,-2) \notin D$ ، و منه ش2 غير محقق و D ليس فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 :\ a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}}$$

من أجل $X = (0,1,0) \epsilon E$ ، و من أجل $\lambda = 3$لدينا $\lambda X = (0,3,0) \notin D$ ، و منه ش2 غير محقق و E ليس فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

حل التمرين الثاني

$$\boldsymbol{H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x + y - z - t = 0\}}$$

إيجاد أساس لـ $\boldsymbol{H}$

أ/ الأشعة المولدة

ليكن $X = (x,y,z,t) \epsilon H$ لدينا $\boldsymbol{t = x + y - z}$ إذن

$$\begin{aligned} X &= (x,y,z,\boldsymbol{x + y - z}) \\ &= (x,0,0,\boldsymbol{x}) + (0,y,0,\boldsymbol{y}) + (0,0,z,-z) \\ &= x\underbrace{(1,0,0,\boldsymbol{1})}_{u} + y\underbrace{(0,1,0,\boldsymbol{1})}_{v} + z\underbrace{(0,0,1,-1)}_{w} \end{aligned}$$

ومنه الأشعة u, v, w هي أشعة مولدة للفضاء الشعاعي H

ب/ الإستقلال الخطي

ليكن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \epsilon \mathbb{R}$ حيث $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ إذن

$$\begin{aligned} &(\lambda_1,0,0,\lambda_1) + (0,\lambda_2,0,\lambda_2) + (0,0,\lambda_3,-\lambda_3) = (0,0,0,\boldsymbol{0}) \\ &\Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0,\boldsymbol{0}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

نستنتج أن الأشعة u, v, w هي أشعة مستقلة خطيا و هي أساس لـ H و $dimH = 3$

إيجاد أساس لـ $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x + y = 2z\ ,\quad t = 0\}}$$

أ/ الأشعة المولدة

ليكن $X = (x,y,z,t) \epsilon G$ لدينا $t = 0$ و $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ إذن

$$\begin{aligned} X &= \left(x, y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, 0\right) \\ &= \left(x, 0, \frac{1}{2}x, 0\right) + \left(0, y, \frac{1}{2}y, \boldsymbol{0}\right) \\ &= x\underbrace{\left(1,0,\frac{1}{2},0\right)}_{u} + y\underbrace{\left(0,1,\frac{1}{2},0\right)}_{v} \end{aligned}$$

ومنه الأشعة u, v هي أشعة مولدة للفضاء الشعاعي G

ب / الإستقلال الخطي

ليكن $\lambda_1, \lambda_2 \epsilon \mathbb{R}$ حيث $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ إذن

$$\left(\lambda_1, 0, \frac{1}{2}\lambda_1, 0\right) + \left(0, \lambda_2, \frac{1}{2}\lambda_2, 0\right) = (0,0,0,\mathbf{0})$$

$$\Rightarrow \left(\lambda_1, \lambda_2, \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2, 0\right) = (0,0,0,\mathbf{0})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

نستنتج أن الأشعة u, v هي أشعة مستقلة خطيا و هي أساس لـ G و $dimG = 2$

2/ إيجاد أساس لـ $H \cap G$

أ/ الأشعة المولدة

ليكن $X = (x, y, z, t) \epsilon H \cap G$ لدينا

$$\begin{cases} t = x + y - z \\ t = 0 \\ x + y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = z \\ x + y = 2z \end{cases} \Rightarrow z = 2z \Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow x + y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = (x, -x, 0,0)$$

$$= x \underbrace{(1, -1,0, \mathbf{0})}_{u}$$

ومنه الشعاع u هو شعاع مولدة للفضاء الشعاعي $H \cap G$

ب/ الإستقلال الخطي

بما أن $u \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ فهو مستقل خطيا

نستنتج أن الشعاع u هو أساس لـ H و $dimH \cap G = 1$

3/ بعد $H + G$

$$dim(H + G) = dimH + dimG - dim(H \cap G)$$

$$= 3 + 2 - 1 = 4 = dim\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$$

نستنتج أن : $H + G = \mathbb{R}^4$

حل التمرين الثالث

لتكن u, v, w أشعة مستقلة خطيا ، ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \epsilon \mathbb{R}$ حيث : $\lambda_1(u + v) + \lambda_2(u - v) + \lambda_3(u - 2v + w) = 0$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)u + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)v + \lambda_3 w = 0$$

و بما أن u, v, w مستقلة خطيا نستنتج أن

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \dots\dots\dots . a \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \dots\dots\dots . b \quad /a + b \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

و منه $u + v$ ، $u - v$ ، $u - 2v + w$ أشعة مستقلة خطيا