Correction de l'interrogation(Analyse03. Année universitaire 2021/2022)

__Exercice__ (**15 pts**)

Justifions les réponses suivantes (**1.5Pts** sur chaque réponse)

1. La série numérique de terme général $u_n = \left(\dfrac{n^2+a}{n^2+b}\right)^{n^3}$ ($a < b$) converge puisque $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \exp(a-b) < 1$.

2. La série numérique de terme général $u_n = n\sin(\frac{1}{n})$ diverge puisque $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 1 \neq 0$.

3. La série numérique de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente puisque (u_n) ne converge pas absolument mais elle coverge d'après Leibnitz($(|u_n|)$ est décroissante vers 0).

4. La série numérique de terme général $u_n = \dfrac{\sin n}{n^\alpha}$ ($\alpha > 1$) est absolument convergente puisque $|u_n| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ (terme de série de Riemann qui est cov.). D'après le Th. de comparaison $\sum u_n$ cov.

5. La suite de fonctions de terme général $f_n(x) = \dfrac{1-nx}{1+nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ puisque
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x = 0 \\ -1, \text{ si } x \neq 0 \end{cases}.$$

6. La suite de fonctions de terme général $f_n(x) = \dfrac{1-nx}{1+nx}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x = 0 \\ -1, \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

7. Le domaine de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$ est égale $D = [-1,1]$, puisque son rayon de convergence $R = 1$ et les séries numériques $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(\pm 1)^n}{n(n+1)}$ convergent.

8. De la question 7, on peut justifier l'existence des sommes des séries numériques $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ puisque la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$ converge aux bords de l'intervalle $D = [-1,1]$. Donc selon Abel $\lim_{x\to -1^+} \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$ et $\lim_{x\to 1^-} \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$ existent.

9. La série trigonométrique $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}\sin(nx)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, puisque $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est le terme général d'une série absolument convergente, donc d'après Weierstrass, la série trigonométrique est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

10. La série trigonométrique $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin(nx)}{n}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, puisque la suite numérique $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0, et la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kx)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc d'après Abel la série conv. sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.