Table des matières

Chapitre 1

Fonctions définies par une intégrale

Ce chapitre consiste à étudier les fonctions de la forme :

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx, \text{ ou } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ et } b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

en particulier, on se pose la question de savoir à quelles conditions sur f on a la continuité, la dérivabilité et l'intégrabilité de la fonction F. On distinguera les cas des intégrales propres où f est définie sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et des intégrales impropres.

1.1 Fonctions définies par une intégrale propre

On considère dans cette section une fonction $f = f(x,y) : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ (I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) intégrable au sens de Riemann par rapport à la première variable x sur $[a,b]$, pour tout $y \in I$.

1.1.1 Propriétés d'une fonction définie par une intégrale propre

Continuité

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la continuité de la fonction définie pour par :

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx, y \in I. \tag{1.1}$$

Théorème 1.1.1. *Soit $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors la fonction F définie par la relation (1.1) est aussi continue sur I. En particulier, pour tout $y_0 \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{y \to y_0} F(y) &= \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx \\ &= \int_a^b f(x,y_0)dx = F(y_0), \end{aligned}$$

*ce qui est une cas **d'interversion de limite et d'intégrale**.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[a,b]$ du faite que f est continue.
Soit maintenant y_1, y_2 deux points quelconques de I et soit $V \subset I$ un intervalle compact contenant y_1 et y_2.
Puisque f est continue sur $[a,b] \times I$, donc elle est uniformément continue sur le compact $[a,b] \times V$, c'est-à-dire, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, telles que $\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in [a,b] \times V$, on a :

$$\left\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\right\| < \delta \Rightarrow \left|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\right| < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{1.2}$$

En particulier, , si on pose $x = x_1 = x_2$, on trouve, pour tout $y_1, y_2 \in V$:

$$\left|y_1 - y_2\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{1.3}$$

D'où, pour tout $y_1, y_2 \in V$, tel que $\left|y_1 - y_2\right| < \delta$, on a :

$$\begin{aligned} \left|F(y_1) - F(y_2\right| &= \left|\int_a^b (f(x,y_1) - f(x,y_2))\, dx\right| \\ &\leq \int_a^b \left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| dx < \epsilon. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Par suite F est uniformément continue sur V, donc elle est continue su I. $\square$

Exemple 1.1.1. *Considérons la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy)\dfrac{\ln(x+1)}{x}, & si \quad (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ 0, & ailleurs. \end{cases} \tag{1.5}$$

Par exemple f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$, alors la fonction $y \mapsto F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy)\frac{\ln(x+1)}{x}dx$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité

Théorème 1.1.2. *Soit $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b] \times I$. On suppose que la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur $[a,b] \times I$, alors la fonction F définie par la relation (1.1) est dérivable sur I, et on a :*

$$\dot{F}(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^b f(x,y)dx\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx, \tag{1.6}$$

ce qui est un cas ***d'interversion de dérivée et d'intégrale****.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que les fonctions $x \mapsto f(x,y)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ sont intégrables sur $[a,b]$ du fait que f et $\dfrac{\partial}{\partial y} f$ sont continues. Comme précédemment, soit y un point quelconque de I et soit $V \subset I$ un intervalle compact contenant y. Il suffit de démontrer que :

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{F(y+h) - F(y)}{h}\right) - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx = 0. \tag{1.7}$$

En effet, si le théorème des accroissements finis s'applique, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx &= \int_a^b \left(\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} - \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)dx \quad (1.8) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y+\theta h) - \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)dx, \ \theta \in]0,1[. \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{\partial}{\partial y} f$ est uniformément continue sur le compact $[a,b] \times V$, on a alors, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, telles que $\forall x \in [a,b], \forall y, h \in V$:

$$\left|(y+h) - y\right| = |h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y+\theta h) - \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{1.9}$$

Par conséquent :

$$\left|\frac{F(y+h)-F(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx\right| \leq \int_a^b \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y+\theta h) - \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| < \epsilon, \tag{1.10}$$

ce qui prouve la dérivabilité de F en y, et puisque y est considéré quelconque dans I, ceci montre bien la dérivabilité de F sur I. □

Intégration

Théorème 1.1.3. *Soit $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b] \times I$, alors la fonction F définie par la relation (1.1) est intégrable sur I. En particulier pour tout $y \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} \int_I F(y)dy &= \int_I dy\left(\int_a^b f(x,y)dx\right) \\ &= \int_a^b dx\left(\int_I f(x,y)dy\right), \end{aligned} \tag{1.11}$$

ce qui est un cas ***d'interversion des intégrales****.*

Démonstration. Nous allons démontrer une formule plus générale. C'est-à-dire, on veut démontrer que :

$$G(z) = \int_I dy\left(\int_a^z f(x,y)dx\right) = \int_a^z dx\left(\int_I f(x,y)dy\right) = H(z), \text{ pour tout } z \in [a,b], \tag{1.12}$$

où G, H sont des fonctions continues sur $[a,b]$.

D'une part, si on pose $\int_a^z f(x,y)dx = F(z,y)$. Il est claire que F est continue par le théorème 1.1.1, et de plus :

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z,y) = f(z,y). \tag{1.13}$$

On en déduit d'après le théorème 1.1.2, que :

$$\dot{G}(z) = \int_I \frac{\partial}{\partial z} F(z,y)dy = \int_I f(z,y)dy. \tag{1.14}$$

D'autre part, si on pose $\int_c^d f(x,y)dy = K(x)$, on peut alors écrire :

$$H(z) = \int_a^z K(x)dx. \tag{1.15}$$

Puisque k est continue, on en déduit :

$$\dot{H}(z) = K(z) = \int_c^d f(z, y)dy \tag{1.16}$$

De (1.14) et (1.16), on trouve :

$$\dot{G}(z) = \dot{H}(z) \tag{1.17}$$

En intégrant cette dernièer égalité de a à t, et en utilisant le fait que $G(a) = H(a) = 0$, on en déduit que $G(z) = H(z)$, pour tout $z \in [a, b]$. $\square$

1.2 Fonctions définies par une intégrale généralisée

Soit $f : [a, b[\times I \to \mathbb{R}$ (I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) une fonction de deux variables. On suppose que $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et que pour certains $y \in I$, la fonction f n'est pas définie en b. On suppose également que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x, y)dx$ converge et on s'intéresse aux propriétés des fonctions définies sur I par les intégrales généralisées suivantes :

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x, y)dx \tag{1.18}$$

et :

$$F^*(y) = \int_a^b f(x, y)dx = \lim_{\gamma \to 0} \int_a^{b-\gamma} f(x, y)dx. \tag{1.19}$$

1.2.1 Convergence uniforme des intégrales généralisées

Définition 1.2.1. *On dit que l'intégrale généralisée (1.18) est uniformément convergente sur I, si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que, } \forall y \in I, \ \forall z \in [\delta, +\infty[, \text{ on a : } \left| F(y) - \int_a^z f(x, y)dx \right| < \epsilon. \tag{1.20}$$

Définition 1.2.2. *On dit que l'intégrale généralisée (1.19) est uniformément convergente sur I, si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que, } \forall y \in I, \ \forall \gamma \in]0, \delta[\text{, on a : } \left| F^*(y) - \int_a^{b-\gamma} f(x,y)dx \right| < \epsilon. \tag{1.21}$$

Théorème 1.2.1. *Soit $f : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ (I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) une fonction intégrable (au sens généralisée) sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ converge uniformément sur I.
2. La suite de fonctions de terme général $F_n(y) = \int\limits_a^{y_n} f(x,y)dx$ converge uniformément sur I, , où $(y_n)_n$ est une suite d'élément de $[a, +\infty[$ de limite $+\infty$, quand $n \to +\infty$.

Démonstration. La preuve de ce théorème découle immédiatement de la preuve du théorème **??** (Voir chapitre 5). □

Corollaire 1.2.1. *D'une manière analogue, si f une fonction intégrable (au sens généralisée) sur l'intervalle $[a, b[$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. l'intégrale $\int_a^b f(x,y)dx$ converge uniformément sur I.
2. La suite de fonctions de terme général $F_n^*(y) = \int\limits_a^{\gamma_n} f(x,y)dx$ converge uniformément sur I , où $(\gamma_n)_n$ est une suite d'élément de $[a, +b[$ de limite 0, quand $n \to +\infty$.

1.2.2 Critères de convergence uniforme des intégrales généralisées

Critère de Cauchy

Théorème 1.2.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale généralisée (1.18) soit uniformément convergente sur I est :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que, } \forall y \in I, \ \forall z_2 > z_1 \geq \delta, \text{ on a } \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x,y)dx \right| < \epsilon. \tag{1.22}$$

Démonstration. * Supposons que l'intégrale généralisée (1.18) soit uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. On a alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que}, \forall y \in I, \ \forall z_2 > z_1 \geq \delta, \text{ on a} \left| \int_{z_1}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } \left| \int_{z_2}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour tout $y \in I$, et pour tout $z_2 > z_1 \geq \delta$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x,y)dx \right| &= \left| \int_{z_1}^{+\infty} f(x,y)dx - \int_{z_2}^{+\infty} f(x,y)dx \right| \\ &\leq \left| \int_{z_1}^{+\infty} f(x,y)dx \right| + \left| \int_{z_2}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \epsilon. \end{aligned} \tag{1.23}$$

* Supposons maintenant que l'intégrale généralisée (1.18) vérifie le critère de Cauchy, i.e :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que}, \forall y \in I, \ \forall z_2 > z_1 \geq \delta, \text{on a} : \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x,y)dx \right| < \epsilon. \tag{1.24}$$

En passant à la limite, quand $z_2 \to +\infty$, on obtient le résultat demandé. □

Corollaire 1.2.2. *De la même manière, on peut démontrer que l'intégrale généralisée (1.19) soit uniformément convergente sur I, si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que}, \forall y \in I, \ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in]0, \delta[\,, (\gamma_1 > \gamma_2), \text{ on a} : \left| \int_{b-\gamma_1}^{b-\gamma_2} f(x,y)dx \right| < \epsilon. \tag{1.25}$$

Critère de Weierstrass

Théorème 1.2.3. *Soit $f : [a, b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b[$ (I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Supposons qu'il existe une fonction réelle g localement intégrable sur $[a, b[$ (appelée fonction majorante) vérifiant :*

$$\begin{cases} 1) \ |f(x,y)| \leq g(x), \text{ pour tout } x \in [a, b[, \\ 2) \text{ L'intégrale } \int_a^b g(x)dx \text{ converge.} \end{cases}$$

Alors, pour tout $y \in I$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x,y)dx$ converge absolument et uniformément sur I.

Démonstration. La convergence absolue de l'intégrale $\int_a^b f(x,y)dx$ découle immédiatement de la première condition.
La convergence uniforme de l'intégrale $\int_a^b f(x,y)dx$ découle immédiatement de l'inégalité :

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(x,y)dx\right| \leq \int_{z_1}^{z_2} \left|f(x,y)\right| dx \leq \int_{z_1}^{z_2} \left|g(x)\right| dx < \epsilon,$$

et le critère de Cauchy. □

Critère d'Abel-Dirichlet

Lemme 1.2.1. *Soit $f : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, positive et décroissante par rapport à x sur $[a,b[$ et tendant vers 0 uniformément quand x tend vers b, et soit $g : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b[$ et vérifie la propriété :*

$$\exists M > 0, \forall z \in [a,b[\,, \forall y \in I, \text{ on a } \left|\int_a^z g(x,y)dx\right| \leq M. \tag{1.26}$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ converge uniformément sur I.

Démonstration. Pour tout $z_1, z_2 \in [a,b[$, l'utilisation de la deuxième formule de la moyenne, nous donne :

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x,y)g(x,y)dx = f(z_1,y)\int_{z_1}^{k} g(x,y)dx + f(z_2,y)\int_{k}^{z_2} g(x,y)dx, \; k \in [z_1,z_2]. \tag{1.27}$$

Par hypothèse,

$$\lim_{x\to b} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ tel que}, \forall y \in I, \; \forall x \in [\delta, b[\,, \text{ on a : } \left|f(x,y)\right| < \frac{\epsilon}{4M}. \tag{1.28}$$

D'autre part, l'utilisation de l'hypothèse (1.26), nous permet d'écrire :

$$\left|\int_{z_1}^{k} g(x,y)dx\right| = \left|\int_a^k g(x,y)dx - \int_a^{z_1} g(x,y)dx\right| \leq 2M, \text{ pour tout } k \in [z_1,z_2]. \tag{1.29}$$

et

$$\left|\int_{k}^{z_2} g(x,y)dx\right| = \left|\int_a^{z_2} g(x,y)dx - \int_a^{k} g(x,y)dx\right| \leq 2M, \text{ pour tout } k \in [z_1,z_2]. \tag{1.30}$$

Donc, pour tout $x, z_1, z_2 \in [\delta, b[$ et pour tout $k \in [z_1, z_2]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left|\int_{z_1}^{z_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| &\leq \left|f(z_1,y)\right|\left|\int_{z_1}^{k} g(x,y)dx\right| + \left|f(z_2,y)\right|\left|\int_{k}^{z_2} g(x,y)dx\right| \\ &< \frac{\epsilon}{4M} \times 2M + \frac{\epsilon}{4M} = \epsilon. \end{aligned} \tag{1.31}$$

□

1.2.3 Propriétés d'une fonction définie par une intégrale généralisée

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à des propriétés de la fonction définie pour $y \in I$ par :

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \tag{1.32}$$

Le cas où b fixé dans $\mathbb{R}$ ce traite de la même manière.

Continuité

Théorème 1.2.4. *Soit $f : [a,+\infty[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit l'intégrale (1.32) converge uniformément sur I, alors la fonction F définie par la relation (1.32) est aussi continue sur I. En particulier, pour tout $y_0 \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{y\to y_0} F(y) &= \lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx \\ &= \int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = F(y_0), \end{aligned} \tag{1.33}$$

ce qui est une cas ***d'interversion de limite et d'intégrale.***

Démonstration. D'après le théorème 1.2.1, la convergence uniforme de l'intégrale (1.32) entraîne la convergence uniforme de la suite de fonctions (F_n) de terme général

$$F_n(y) = \int_a^{y_n} f(x,y)dx,$$

où (y_n) est une suite d'élément de $[a,+\infty[$ de limite $+\infty$, quand $n \to +\infty$. L'utilisation du théorème 1.1.1 montre que F_n est une fonction continue sur

I, c'st-à-dire que $F(y) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{z_n} f(x,y)dx$ est une fonction continue sur I, et de plus :

$$\begin{aligned}\lim_{y\to y_0} F(y) &= \lim_{y\to y_0}\lim_{n\to+\infty}\int_a^{y_n} f(x,y)dx = \lim_{n\to+\infty}\lim_{y\to y_0}\int_a^{y_n} f(x,y)dx \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^{y_n}\lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = F(y_0) \quad (1.34)\end{aligned}$$

□

Dérivabilité

Théorème 1.2.5. *Soient* $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} : [a,+\infty[\times I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. On suppose que l'intégrle (1.32) converge et que l'intégrale* $\int_a^{+\infty}\dfrac{\partial f}{\partial y}dx$ *converge uniformément sur I, alors la fonction F définie par la relation (1.32) est dérivable sur I , et on a :*

$$\dot{F}(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right) = \int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx, \qquad (1.35)$$

*ce qui est un cas **d'interversion de dérivée et d'intégrale.***

Démonstration. D'après le théorème 1.2.1, la convergence de l'intégrale (1.32) entraîne la convergence de la suite de fonctions (F_n) de terme général

$$F_n(y) = \int_a^{y_n} f(x,y)dx, \qquad (1.36)$$

où (y_n) est une suite d'élément de $[a,+\infty[$ de limite $+\infty$, quand $n \to +\infty$.
Puisque $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} : [a,+\infty[\times I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, l'utilisation du théorème 1.1.2 montre que :

$$\dot{F}_n(y) = \int_a^{z_n}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, \qquad (1.37)$$

et de plus $\dot{F}_n$ est continue sur I (d'après le théorème 1.1.1).
D'autre part, $\dot{F}_n$ est uniformément convergente sur I car $\int_a^{+\infty}\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$ l'est aussi.

Maintenant, l'utilisation du théorème de la dérivabilité des suites de fonctions assure la dérivabilité de la fonction F sur I, et de plus, on a :

$$\dot{F}(y) = \lim_{n\to+\infty} \dot{F}_n(y) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{z_n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx. \tag{1.38}$$

□

Intégration

Théorème 1.2.6. *Soit $f : [a,+\infty[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit l'intégrale (1.32) converge uniformément sur I, alors la fonction F définie par la relation (1.32) est aussi intégrable sur I, et de plus, on a :*

$$\int_I F(y)dy = \int_I dy\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right) = \int_a^{+\infty} dx\left(\int_I f(x,y)dy\right). \tag{1.39}$$

ce qui est une cas ***d'interversion des deux intégrales.***

Démonstration. D'après le théorème 1.2.1, la convergence uniforme de l'intégrale (1.32) entraîne la convergence uniforme de la suite de fonctions (F_n) de terme général

$$F_n(y) = \int_a^{y_n} f(x,y)dx, \tag{1.40}$$

où (y_n) est une suite d'élément de $[a,+\infty[$ de limite $+\infty$, quand $n \to +\infty$. L'utilisation du théorème 1.1.3 montre que F_n est une fonction intégrable sur I, c'st-à-dire que $F(y) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{z_n} f(x,y)dx$ est une fonction intégrable sur I (limite d'une suite de fonctions continue et uniformément convergente, donc elle est intégrable), et de plus

$$\begin{aligned}\int_I F(y)dy &= \int_I dy\left(\lim_{n\to+\infty}\int_a^{z_n} f(x,y)dx\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_I dy\left(\int_a^{z_n} f(x,y)dx\right)\\ &\lim_{n\to+\infty}\int_a^{z_n} dx\left(\int_I f(x,y)dy\right).\end{aligned} \tag{1.41}$$

On en déduit alors :

$$\int_I F(y)dy = \int_I dy\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right) = \int_a^{+\infty} dx\left(\int_I f(x,y)dy\right). \tag{1.42}$$

□

1.3 Fonctions Spéciales

1.3.1 La fonction Gamma d'Euler

Définition 1.3.1. *On appelle fonction gamma d'Euler, la fonction spéciale* Γ *définie par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)dx,\ \alpha > 0. \tag{1.43}$$

Remarque 1.1. *La fonction gamma d'Euler définie par la relation (1.43) est bien définie sur* $]0, +\infty[$*. En effet :*
Au voisinage de zéro, $x^{\alpha-1}\exp(-x) \overset{V(0)}{\sim} x^{\alpha-1}$.
Puisque $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ *converge si et seulement si* $\alpha > 0$*, on en déduit que* $\int_0^1 x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$ *converge si et seulement si* $\alpha > 0$.
Au voisinage de l'infini, si on pose par exemple $g(x) = x^{-2}$*, on trouve alors :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\exp(-x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}\exp(-x) = 0, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.44}$$

Puisque $\int_1^{+\infty} x^{-2}dx$ *converge, on en déduit que* $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$ *converge, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Finalement $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$ *converge si et seulement si* $\alpha > 0$.

Théorème 1.3.1. *La fonction* Γ *ayant la propriété suivante :*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \text{ pour tout } \alpha > 0. \tag{1.45}$$

En particulier $\Gamma(n+1) = n!$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Une intégration par parties, nous donne :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha}\exp(-x)dx \\ &= -\lim_{t\to+\infty}[x^{\alpha}\exp(-x)]_0^t + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)dx = \alpha\Gamma(\alpha).\end{aligned} \tag{1.46}$$

D'autre part $\Gamma(0) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)dx = 1$, on en déduit que $\Gamma(n+1) = n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarque 1.2. *La fonction Γ peut être prolongée en une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels, excepté pour $\alpha = 0, -1, -2, -3, \ldots$.*
En effet, de la relation (1.45), on peut écrire :

$$\Gamma(\alpha - 1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha - 1} \qquad -1 < \alpha - 1 < 0$$

$$\Gamma(\alpha - 2) = \frac{\Gamma(\alpha - 1)}{\alpha - 2} \qquad -2 < \alpha - 2 < -1.$$

De la manière manière, on peut trouver :

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} \qquad -n < \alpha < -(n-1). \tag{1.47}$$

La Figure 1.1 représente le graphe de la fonction gamma d'Euler.

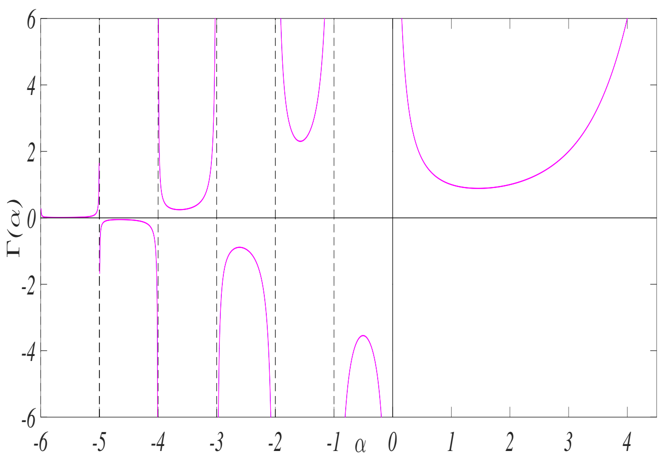

FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction gamma.

Théorème 1.3.2. *La fonction Γ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus, on a :*

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \ln^n(x) x^{\alpha-1} \exp(-x)dx. \tag{1.48}$$

Démonstration. Posons $f(\alpha,x)=x^{\alpha-1}\exp(-x)$, $(\alpha,x)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et de plus, on a :

$$\frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x)=\ln^n(x)x^{\alpha-1}\exp(-x). \tag{1.49}$$

Considérons un intervalle compact quelconque $[a,b]$ de $]0,+\infty[$. Il suffit de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x)dx$ est uniformément convergente sur tout segment $[a,b]$. En effet :
Pour tout $x\in\,]0,1]$, la fonction $\alpha\mapsto x^{\alpha-1}$ est décroissante, donc pour tout $\alpha\in[a,b]$, on a $0<f(\alpha,x)\leq x^{a-1}$, et pour tout $x>1$, la fonction $\alpha\mapsto x^{\alpha-1}$ est croissante, donc pour tout $\alpha\in[a,b]$, on a $0<f(\alpha,x)\leq x^{b-1}\exp(-x)$.
Au voisinage de 0, on a alors $\left|\frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x)\right|=\left|\ln^n(x)\right|f(\alpha,x)=o\left(\frac{1}{x^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ et au voisinage de l'infini : $\left|\frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x)\right|=\left|\ln^n(x)\right|f(\alpha,x)=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Puisque les deux intégrales $\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\frac{a}{2}}}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ sont convergente, le critère de Weierstrass montre quel'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x)dx$ est également uniformément convergente sur tout segment $[a,b]$, ce qui achève d'établir que Γ est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc que Γ est de classe $C^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. □

1.3.2 La fonction Béta d'Euler

Définition 1.3.2. *On appelle fonction béta d'Euler, la fonction spéciale B définie par :*

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,\ \textit{pour tout}\ \alpha,\beta>0. \tag{1.50}$$

Remarque 1.3. *La fonction béta d'Euler définie par la relation (1.50) est bien définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. En effet :*
Au voisinage de zéro, $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\overset{V(0)}{\sim}x^{\alpha-1}$.

Puisque $\int_0^{\frac{1}{2}}x^{\alpha-1}dx$ converge si et seulement si $\alpha>0$, on en déduit que $\int_0^{\frac{1}{2}}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$

converge si et seulement si $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$.
Au voisinage de 1, $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \overset{V(0)}{\sim} x^{\beta-1}$.
Puisque $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\alpha-1}dx$ *converge si et seulement si* $\beta > 0$, *on en déduit que* $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$
converge si et seulement si $\beta > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Finalement $\int_{0}^{1} x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$ *converge si et seulement si* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$.

Théorème 1.3.3. *(Symétrie) La fonction B est symétrique, c'est-à-dire, pour tout* $\alpha, \beta > 0$, *on a :*

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha). \tag{1.51}$$

Démonstration. En effet, en effectuant le changement de variable $x = 1-t$, on trouve immédiatement le résultat. □

Théorème 1.3.4. *(Autre formule de la fonction béta) La fonction béta peut se représenter par la formule suivante :*

$$B(\alpha,\beta) = \int_{0}^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt. \tag{1.52}$$

Démonstration. En effet, en effectuant le changement de variable $x = \frac{t}{1+t}$, on trouve immédiatement le résultat. □

1.3.3 Relation entre les fonctions gamma et béta

Théorème 1.3.5. *1) Pour tout* $\alpha, \beta > 0$, *on a :*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.53}$$

2) Les fonctions B et Γ *vérifient la formule de réflexion d'Euler suivante :*

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \; \alpha \in]0,1[. \tag{1.54}$$

Démonstration. En effectuant le changement de variable $x = (1+z)y$ $(z > 0)$ dans la relation (1.43), on trouve :

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+z)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} \exp\left(-(1+z)\,y\right) dy, \text{ pour tout } \alpha,\beta,z > 0. \tag{1.55}$$

Multiplions les deux membres de l'galité (1.55) par $z^{\alpha-1}$, puis intégroons par rapport à z de 0 à $+\infty$, on trouve :

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^{+\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^{\alpha+\beta}} dz = \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1} dz \left(\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} \exp\left(-(1+z)\,y\right) dy\right), \text{ pour tout } \alpha,\beta,z > 0, \tag{1.56}$$

ou d'une manière équivalente :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+\beta)\times B(\alpha,\beta) &= \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}\left(\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}\exp\left(-(1+z)\,y\right)dy\right)dz \\
&= \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}\exp(-y)\left(\int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}\exp(-zy)\,dz\right)dy \\
&= \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}\exp(-y)\,\frac{\Gamma(\alpha)}{y^{\alpha}}dy = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} y^{\beta-1}\exp(-y)\,dy \\
&= \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)
\end{aligned}$$

2) L'égalité $B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ découle immédiatement de la relation (1.53) en posant $\beta = 1-\alpha$.

En utilisant la deuxième formule de la fonction béta, on trouve :

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt \tag{1.57}$$

Calculons maintenant l'intégrale (1.57) par le théorème des résidus. On définit alors le chemin suivant, pour $f(z) = \dfrac{z^{\alpha-1}}{1+z}$ et $0 < \epsilon < 1 < R$:

a) C_ϵ le demi cercle de rayon ϵ sur le demi plan $\Re(z) < 0$.

b) Les deux segments $S^{\pm}_{\epsilon,R} = \left\{\pm i\epsilon,\ \ \pm i\epsilon + \sqrt{R^2-\epsilon^2}\right\}$.

c) L'arc de cercle $\Gamma_{\epsilon,R} = \left\{R\exp(i\theta),\ \theta \in \left[\arctan\dfrac{\epsilon}{\sqrt{R^2-\epsilon^2}}, 2\pi - \arctan\dfrac{\epsilon}{\sqrt{R^2-\epsilon^2}}\right]\right\}$.

Choisissons ϵ et R de tel sorte que $z_0 = -1$ soit dans le lacet. L'utilisation du théorème des résidus nous donne :

$$\int_{C_\epsilon} f(z)dz + \int_{S^-_{\epsilon,R}} f(z)dz + \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz + \int_{S^+_{\epsilon,R}} f(z)dz = 2\pi i \times \text{Résidus}\,(-1, f)\,. \quad (1.58)$$

En passant à la limite, quand $\epsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, il vient par le lemme de Jordan que :

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_{C_\epsilon} f(z)dz + \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz = 0 + 0 = 0. \quad (1.59)$$

D'autre part, pour tout $t > 0$, on a :

$$\lim_{\epsilon\to 0}(t + i\epsilon)^{1-\alpha} = t^{1-\alpha} \text{ et } \lim_{\epsilon\to 0}(t - i\epsilon)^{1-\alpha} = t^{1-\alpha}\exp(-2\pi i\alpha). \quad (1.60)$$

Donc :

$$\lim_{\epsilon\to 0}(t + i\epsilon)^{\alpha-1} = t^{\alpha-1} \text{ et } \lim_{\epsilon\to 0}(t - i\epsilon)^{\alpha-1} = t^{\alpha-1}\exp(2\pi i\alpha). \quad (1.61)$$

De (1.58), (1.59) et (1.61), on peut alors écrire :

$$\exp(2\pi i\alpha)\int_{+\infty}^{0} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz + \int_{0}^{+\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz = 2\pi i \times Rsidus\,(-1, f)\,. \quad (1.62)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(1 - \exp(2\pi i\alpha))\int_{0}^{+\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz &= 2\pi i \times Rsidus\,(-1, f) = 2\pi i \times \lim_{z\to -1} z^{\alpha-1}\\ &= 2\pi i \times \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^{1-\alpha}} = -\exp(i\pi\alpha),\end{aligned}$$

ainsi, après simplification, on trouve :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \text{ pour tout } \alpha > 0. \quad (1.63)$$

□

Exemple 1.3.1. *Considérons l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}}}{(1+t)^3}dt$

Nous avons :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{5}{3}-1}}{(1+t)^{\frac{5}{3}+\frac{4}{3}}} dt = B\left(\frac{5}{3}\frac{4}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(3)} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{2}{3}+1)\Gamma(\frac{1}{3}+1)}{2} = \frac{\frac{2}{3}\times\Gamma(\frac{2}{3})\times\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})}{2} \\ &= \frac{1}{9}\frac{\Gamma(1-\frac{1}{3})\times\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3})} = B\left(\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \tag{1.64}$$