Chapitre II

EQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

2.1 Préliminaires

Une équation aux dérivées partielles équation est une équation de la forme

$$F(x,y,...,u,u'_x,u'_y,...,u''_{xx},u''_{yy},u''_{xy},...)=0, \tag{1}$$

òu $u=u(x,y)$ est la fonction inconnue des variables réelles x,y à déterminer, et F est une fonction donnée (pour ce chapitre u et F sont des fonctions réelles), x,y sont les variables indépendantes avec

$$u'_x=\frac{\partial u}{\partial x},u'_y=\frac{\partial u}{\partial y},u''_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},u''_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},u''_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

- L'équation (1) est dite linéaire si F est une fonction linéaire dans les quantités $u,u'_x,u'_y,u''_{xx},u''_{yy},u''_{xy}...$, par exemple l'équation aux dérivées partielles linéaire de second ordre de deux variables indépendantes x et y est :

$$au''_{xx}+bu''_{xy}+cu''_{yy}+ku'_x+lu'_y+mu=f$$

òu a,b,c,k,l,m et f sont des fonctions de x et y

Définition 36 *on appelle ordre d'une équation aux dérivées partielles l'ordre de la plus grande dérivées présente dans l'équation.*

Remarque 37 *Soit*

$$au''_{xx}+bu''_{xy}+cu''_{yy}+ku'_x+lu'_y+mu=f$$

si a, b, c, k, l, m sont des nombres réels donnés (a, b, c non tous nuls), l'équation est une équation aux dérivées partielles linéaire de second ordre à coefficient constants.

Exemple 38 *1. L'équation de Laplace :*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0,$$

est une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre.

2. $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = h(x,y)$ *est une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre.*

3. *L'équation de diffusion :* $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0,$ *est une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre.*

4. *L'équation* $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \sin(u) = 0,$ *est une équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire.*

5. $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + u(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0,$ *est une équation aux dérivées partielles d' ordre deux non linéaire.*

6. $cos(xy^2)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - y^2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \tan(x^2+y^2)$ *est une EDP du premier ordre linéaire.*

2.2 L' équation aux dérivées partielles quasi linéaire

Soit $u(x,y)$ une fonction réel de deux variables réelles défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$

Définition 39 *Une équation aux dérivées partielles quasi linéaire du second ordre de la forme :*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x,y,u,p,q) \qquad (E)$$

l' inconnue est la fonction $u(x,y), p = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, q = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ et a, b, c sont des fonctions données dans un domaine Ω, F est une fonction réelle .

2.2.1 Les courbes caractéristiques

Soit : $\gamma : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ courbe de $\mathbb{R}^2$.

Définition 40 *1) Les courbes caractéristiques d'équation (E) sont les courbes γ vérifient :*

$$\Delta(t) = c(\varphi(t), \psi(t))\,[\varphi(t)]^{\,2} - 2b(\varphi(t), \psi(t))((\varphi'(t)\psi(t)')) + a(\varphi(t), \psi(t))[\psi(t)']^2 = 0$$

2)On dit que γ n'est caractéristique en aucun point si $\forall t, \Delta(t) \neq 0$.

Théorème 41 *1) Si $a \neq 0$, les courbes caractéristiques sont les solutions d'équation différentielle :*

$$a(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + c(x, y) = 0$$

2) Si $c \neq 0$,ce sont les solutions d'équation différentielle :

$$c(x, y)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2b(x, y)\left(\frac{dx}{dy}\right) + a(x, y) = 0$$

3) Si $a = c = 0$,ce sont les droites :$x =$constante et $y =$constante.

2.2.2 Classification des équations :

Soit l équation (E) avec $a(x, y) = a, b(x, y) = b$ et $c(x, y) = c$

Définition 42 ∘ *Une équation telle que $b^2 - ac > 0$,dans un domaine D est dite hyperbolique dans ce domaine, Elle admet deux familles de courbes caractéristiques dans D ;*

∘ *Si $b^2 - ac = 0$ Léquation (E) est dit parabolique dans D, elle n'admet dans D qu une famille de courbes caractéristiques.*

∘ *Si $b^2 - ac < 0$ Léquation (E) est dite elliptique dans D, elle n'admet pas des courbes caractéristiques (réelles).*

Exemple 43 *1)*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x,y,u,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}),$$

$b^2 - ac = 1$ *l'équation est hyperbolique dans* R^2, *ces courbes caractéristiques sont les solutions de* $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$,

ce sont les droites : $y = x + k_1$ *et* $y = -x + k_2$.

2)

$$y^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x,y,u,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})$$

On a : $b^2 - ac = x^2y^2$, *Léquation est hyperbolique* $(x \neq 0, y \neq 0)$, *les courbes caractéristiques sont les solutions de* $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0$. *Donc , il existe deux familles des courbes sont :*

$y^2 - x^2 = k_1$ *et* $y^2 + x^2 = k_2$ *tel que* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

3)

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x,y,u,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}),$$

les courbes sont les droites : $y = x + k$

2.3 La forme standard

Soit $X = \varphi(x,y), Y = \psi(x,y)$ deux nouvelles variables.

On suppose que $J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \forall x,y$ dans un ouvert Ω.

Soit l équation (E) tel que U une quantité qui dépend de x et y avec : $u(x,y) = u(X,Y)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}(\frac{\partial X}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}(\frac{\partial X}{\partial x})(\frac{\partial Y}{\partial x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}(\frac{\partial Y}{\partial x})^2 + \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}(\frac{\partial X}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}(\frac{\partial X}{\partial y})(\frac{\partial Y}{\partial y}) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}(\frac{\partial Y}{\partial y})^2 + \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}) + \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}) \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
$$

Les termes comportant des dérivées secondes en X et Y qu' expriment

$$a\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$$

Sont

$$A\frac{\partial^2 u(X,Y)}{\partial X^2} + 2B\frac{\partial^2 u(X,Y)}{\partial X \partial Y} + C\frac{\partial^2 u(X,Y)}{\partial Y^2}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
A &= a(\frac{\partial X}{\partial x})^2 + 2b\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + c(\frac{\partial X}{\partial y})^2 \\
B &= a(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x}) + b(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}) + c(\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y}) \\
C &= a(\frac{\partial Y}{\partial x})^2 + 2b(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}) + c(\frac{\partial Y}{\partial y})^2
\end{aligned}
$$

On a donc :

$$B^2 - AC = J^2(b^2 - ac)$$

Ce qui montre que le type de l'équation est conservé par le changement de variables

.

- Donc , on peut choisir X et Y de façon à annuler l'un au moins des termes A, B et C.

2.3.1 Équation hyperbolique

Théorème 44 *Soit $\varphi_1(x,y) = k_1$ et $\varphi_2(x,y) = k_2$ les deux familles de courbes caractéristiques d' une équation hyperbolique. En posant :*

$$\begin{aligned} X_1 &= \varphi_1(x,y), \\ X_2 &= \varphi_2(x,y) \end{aligned}$$

L équation hyperbolique deviendra :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = G(\frac{\partial u}{X_1}, \frac{\partial u}{X_2}, u, X_1, X_2)$$

En posant

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2, \\ Y_2 &= X_1 - X_2 \end{aligned}$$

elle deviendra :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {Y_1}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial {Y_2}^2} = H(\frac{\partial u}{Y_1}, \frac{\partial u}{Y_2}, u, Y_1, Y_2)$$

Exemple 45 *Soit :*

$$y^2 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (E)$$

Les courbes caractéristiques sont $y^2 - x^2 = k_1$ et $y^2 + x^2 = k_2$

Soit $x_1 = y^2 - x^2$ et $x_2 = y^2 + x^2$.Léquation (E) devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{x_1}{2(x_2^2 - x_1^2)} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{x_2}{2(x_2^2 - x_1^2)} \frac{\partial u}{\partial x_1} \qquad (E')$$

Soit maintenant : $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_1 - x_2$. L'équation (E') devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{1}{2y_2} \frac{\partial u}{y_2} - \frac{1}{2y_1} \frac{\partial u}{y_1}$$

2.3.2 Équations paraboliques

Théorème 46 *Soit* $\varphi(x,y) = k$ *la famille de courbes caractéristiques d une équatio parabolique, soit* $x_1 = \varphi(x,y)$ *et* x_2 *une fonction indépendante de* $x_1 (J \neq 0)$. *Avec ces nouvelles variables* (E) *devient :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = G(\frac{\partial u}{x_1}, \frac{\partial u}{x_2}, u, x_1, x_2)$$

Exemple 47 *Soit l'équation :*

$$x^2 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (E)$$

La courbe caractéristique est : $\frac{y}{x} = c$. *On pose* $x_1 = \frac{y}{x}$ *et* $x_2 = y$ *l'équation* (E) *devient :*

$$x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

2.3.3 Équations elliptiques

L'équation des courbes caractéristiques est à

$$a \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 - 2b \left(\frac{dx}{dy} \right) + c = 0$$

Cette équation différentielle n' a pas des solutions reélles, on trouve donc dans le plan complexe :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i \sqrt{\frac{ac - b^2}{a^2}}$$

résolue sous la forme :

$$\begin{aligned} \eta_1(x,y) + i\psi_1(x,y) &= k_{1,} k_1 \in \mathbb{C} \\ \eta_2(x,y) + i\psi_2(x,y) &= k_{2,} k_2 \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

On pose $x_1 = \eta_1(x,y) + i\psi_1(x,y), x_2 = \eta_2(x,y) + i\psi_2(x,y)$

On pose $x_1 = y_1 + iy_2, x_2 = y_1 - iy_2$

Alors le tērme mixte coefficient de $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ disparaît .

Théorème 48 *Soient $\varphi_1(x,y) = k_1$, $\varphi_2(x,y) = k_2$ les solution de*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\sqrt{\frac{ac - b^2}{a^2}}.$$

On pose $y_1 +\ iy_2 = \varphi_1(x,y)$ et $y_1 - iy_2 = \varphi_2(x,y)$. Alors (E) devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = G(\frac{\partial u}{y_1}, \frac{\partial u}{y_2}, u, y_1, y_2)$$

Exemple 49 *Soit (E) :*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Les courbes caractéristiques sont :

$$\begin{cases} 2y - ix^2 = k_1 \\ 2y + ix^2 = k_2 \end{cases},$$

On pose donc $y_1 = 2y$ et $y_2 = -x^2$, (E) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{1}{2y_2} \frac{\partial u}{y_2}.$$

2.4 Équation linéaire à coefficients constants

Soit (E) une équation linéaire à coefficients constants sous la forme suivante :

$$a\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + d\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + e\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + fu(x,y) = F(x,y)$$

a, b, c, d, e, f sont des constantes .

Théorème 50 *Soit (E) une équation linéaire à coefficients constants ,on peut alors trouver λ_1 et λ_2(constantes) telles que en posant :*

$$u(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) \exp(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

(E) devient :

(a) $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} = k\varphi + F(x_1,x_2)$ *ou* $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = c\varphi + G(x_1,x_2)$, *si* (E) *est hyperbolique.*

(b) $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = k\varphi + F(x_1,x_2)$,*si* (E) *est parabolique .*

(c) $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = k\varphi + F(x_1,x_2)$ *est elliptique*

Exemple 51 *Soit (E) :*

$$4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2$$

Les caractéristique est $4(\frac{dy}{dx})^2 - 5\frac{dy}{dx} + 1 = 0$

C'est-à-dire les solutions sont : $y - x = k_1$ *et* $y - x/4 = k_2$

On pose $x_1 = y - x, x_2 = y - x/4$ *, la forme canonique est*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{8}{9}$$

Soit

$$u(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2)\exp(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

Donc

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} = -\lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - (\lambda_1 - \frac{1}{3})\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - (\lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_2}{3})\varphi - \frac{8}{9}\exp - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

En choisissant; $\lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = 0, (E)$ *devient*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} = -\frac{8}{9}\exp\frac{-x_1}{3}.$$