Chapitre 2

Systèmes discrets et dynamique des populations

La forme générale d'un système discret

$$x_{n+1} = f(x_n);\ x_n \in \mathbb{R}^n.$$

2.1 Point Fixe

Définition 3. *Un point fixe d'un système discret noté x^* vérifier*

$$x^* = f(x^*).$$

2.2 Stabilités locale d'un point fixe

Nous définissons une variable locale $u_n = x_n - x^*$ et nous procédons à la linéarisation (**dans le cas de dimension un**)
On réalisant un développement limite de la fonction f au voisinage de x^* le modèle linéarisé locale s'écrit :

$$u_{n+1} = \lambda u_n.$$

avec $\lambda = \dfrac{df(x^*)}{dx_n}$ le point fixe pour ce système est l'origine.
la solution du système linéarisé s'écrit :

$$u_n = \lambda^n u_0$$

(u_0 la condition initiale). Plusieurs cas sont possible :

1. $(\lambda < -1)$ dans ce cas : $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$ La solution s'éloigne du point fixe, en prenant des valeurs de signes alternés.
2. $(\lambda = -1)$, la solution s'écrit : $u_n = (-1)^n u_0$. Donc la solution prend des valeurs alternées u_0 et $-u_0$.
3. $(-1 < \lambda < 0)$, la solution s'écrit : $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$. La solution prend des valeurs de signes alternées et s'approche du point fixe.
4. $(\lambda = 0)$, dés la première itération on va au point fixe 0.
5. $(0 < \lambda < 1)$, la solution s'écrit : $(u_n = \lambda^n u_0)$. La solution converge vers 0.

6. ($\lambda = 1$) alors $u_n = u_0$.

7. ($\lambda > 1$) la solution $u_n = \lambda^n u_0$. La solution s'éloigne du point fixe.

2.3 Application à la dynamique des population

2.3.1 Dynamique d'une seul population

a) Modèle de Verhulst :

l'équation de Verhulst en temps discret s'écrit :

$$x_{n+1} = \rho \frac{x_n}{x_n + k} = f(x_n)$$

où ρ est le taux de croissance de la population et k un paramètre positif et x_n est l'effectif de la population à l'itération n.

Les points fixes de cette équation sont solution de l'équation : $f(x) = x \Rightarrow \rho x = x(x+k) \Rightarrow x = 0$ ou $x = \rho - k$.

La stabilité des points fixes : $f'(x) = \frac{\rho(x+k)-\rho x}{(x+k)^2} = \frac{\rho x+\rho k-\rho x}{(x+k)^2} = \frac{\rho k}{(x+k)^2}$

donc :$f'(0) = \frac{\rho}{k}$

1) si $\frac{|\rho|}{k} < 1 \Rightarrow |\rho| < k$ alors :$x = 0$ est asymptotiquement stable.

2) si $|\rho| > k \Rightarrow x = 0$ est instable.

$f'(\rho - k) = \frac{\rho k}{(\rho-k+k)^2} = \frac{k}{\rho}$

1) si $\frac{k}{|\rho|} < 1$ on a :$k < |\rho|$
   donc :$x = \rho - k$ est asymptotiquement stable.

2) si $k > |\rho|$ donc :$x = \rho - k$ est instable.