

Série N°3

Exercice:

Propagation d'une infection.

En 1979, une épizootie de rage, en provenance d'Europe orientale, est arrivée en France. Les renards étaient les principaux vecteurs de la rage.

On notera $S(t)$ les individus sains et $I(t)$ les individus infectés au temps t .

1) Un modèle de transmission de la rage, tenant compte de la contamination des renards sains par des renards malades est :

$$\begin{cases} S' = r(S + I) \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta SI \\ I' = \beta SI - uI, \end{cases}$$

où tous les paramètres sont strictement positifs.

a) Justifier ce modèle.

b) En étudiant la stabilité de l'état d'équilibre $(S, I) = (K, 0)$, donner les conditions sur les paramètres qui permettent une propagation de l'épizootie.

c) Montrer que la population saine est bornée. Que se passe-t'il pour la population infectée ?

2) Une première méthode pour éradiquer l'épizootie de rage consiste à tuer les renards, en offrant par exemple une prime aux chasseurs. On modélise cette méthode comme suit :

$$\begin{cases} S' = r(S + I) \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta SI - cS \\ I' = \beta SI - uI - cI, \end{cases}$$

où le paramètre c représente l'effet de la chasse qui s'exerce tant sur les renards sains que malades. Donner les conditions sur les paramètres qui empêchent la propagation de l'épizootie.

3) Une seconde méthode pour éradiquer l'épizootie de rage consiste à vacciner les renards. On modélise cette méthode par :

$$\begin{cases} S' = r(S + I) \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta(1 - v)SI \\ I' = \beta(1 - v)SI - uI, \end{cases}$$

où le paramètre v représente l'effet de la vaccination. En étudiant la stabilité de l'état d'équilibre $(S, I) = (K, 0)$, donner les conditions sur les paramètres qui empêchent la propagation de l'épizootie.

4) Quelle méthode préconiserez-vous ?