République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Laouira Widad

COURS:

Les équations de la physique mathématique

Troisième année mathématiques (LMD-S5)

Année 2020/2021

Table des matières

Chapitre I

EQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

1.1 Rappel

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables reèlles définie dans un voisinage de A(ouvert de$\mathbb{R}^2$), si la fonction $f(x,b)$ a une dérivée pour la valeur a de x, on la note $f'_x(a,b)$ et on l'appelle dérivée partielle de $f(x,y)$ par rapport à x au point (a,b).

Si en tout point d'un voisinage de A, $f'_x(x,y)$ existe, on définit ainsi une nouvelle fonction la dérivée partielle de $f(x,y)$ par rapport à x.

On définit de même la dérivée partielle par rapport à y on note :

$$f'_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, f'_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

de la même façon que précédent, on note :

$$f''_x = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, f''_y = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}, f''_{yx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, f''_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Théorème 1 (Schwartz) *Si en un point de A à les dérivées successives f''_{xy} et f''_{yx} existent et sont continues en ce point ces dérivées sont égales : $f''_{xy} = f''_{yx}$*

Exemple 2 $z(x,y) = x^3 - 5xy + y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5$

1.1.1 Dérivées d'une fonction composée de deux variables

Soit la fonction $F(x, y) = f(u, v)$, u et v étant des fonctions de x et y, $u(x, y)$ et $v(x, y)$, avec $u_0 = u(x_0, y_0)$ et $v_0 = v(x_0, y_0)$.

Si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles en (x_0, y_0) et si $f(u, v)$ admet des dérivées partielles continues au voisinage de (u_0, v_0) alors $F(x, y)$ admet des dérivées partielles au point (x_0, y_0) données par :

$$\begin{aligned} F_x^{'}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u}\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \\ F_y^{'}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u}\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \end{aligned}$$

Exemple 3 *Soit* $f(u, v) = u^2 + uv + v^2$ *tel que* $u = 2x + y$ *et* $v = x - 2y$,*on a*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 5u + 4v \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3 \end{cases}$$

1.1.2 Différentielle totale

Définition 4 *Soit une fonction de deux variables* $u(x, y)$ *possédant des dérivées partielles continues. La différentielle totale ou exacte* $u(x, y)$ *s'écrit :*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Exemple 5 *Soit* $u(x, y) = x + x^2y^3, du = (1 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2)dy$

1.2 L'étude d'un système $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

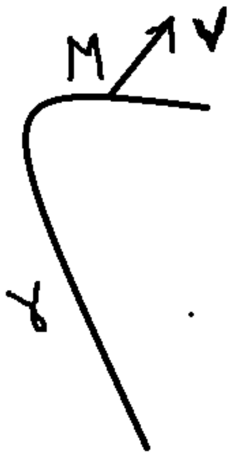
Dans ce chapitre on supposera l'espace R^3 rapporté à un repère orthonormé $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit M le point de coordonnées(x, y, z) et f une fonction définie sur un domaine de $\mathbb{R}^3$, on notera indifféremment $f(x, y, z)$ ou $f(M)$ l'image du point M;

cette partie est consacrée à l'etude d'un système différentiel que nous noterons (S), que nous écrirons sous la forme symbolique suivante :

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \qquad (S)$$

et dont nous allons préciser la définition.

Définition 6 *Soit $V(x,y,z)$ un vecteur variable de $\mathbb{R}^3$,de composantes $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ et $R(x,y,z)$. On appelle solution du système (S) une courbe γ dont la tangente en tout points (x,y,z) où V n'est pas nul et porter par V.*



soit γ une solution, les relations expriment le vecteur dt " variation infinitésimale" de M sur γ de composantes (dx, dy, dz) est proportionnel à V

Définition 7 *On appelle courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ un application d'un segment $[a,b]$ dansR*
^{3} :$t \in [a,b] \xrightarrow{\gamma} \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$.

Elle peut-être décrite par trois fonctions φ, ψ, η .

Exemple 8 *Le cercle unité* $x^2 + y^2 = 1$ *peut-être définie par* $I = [0, 2\pi]$ *et* $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$*. il est alors parcouru dans le sens direct à partir du point A Lorsque t croit, en désignant par* γ *à cette courbe paramétrée,* $-\gamma$ *sera le cercle décrit en sens inverse* $x(t) = \cos t, y(t) = -\sin t$.

Le même cercle peut-être décrit par : $I = [0, 1]$ *;*

pour $t \in [0, 1/2], x(t) = 4t - 1, y(t) = \sqrt{1 - (4t-1)^2}$

pour $t \in [1/2, 1], x(t) = 3 - 4t, y(t) = \sqrt{1 - (3-4t)^2}$

il est alors décrit dans le sens rétrograde en partant du poids B.

Théorème 9 *Soit* γ *une courbe déterminée par un paramétrage* φ, ψ, η *et* T *le vecteur de composantes*$\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt} \frac{d\eta}{dt}$ *,en tout point où* $T \neq 0$ *la tangente* γ *et portée par* T*. La recherche d'une solution de* (S) *est donc d'après les définitions précédentes la recherche de trois fonctions* φ, ψ, η *tel que*T *et* V *soit Colinéaires, c'est le cas s'il existe une fonction* $K(t)$ *tel que :*

$$\frac{d\varphi}{dt} = K(t)P(x, y, z), \frac{d\psi}{dt} = K(t)Q(x, y, z), \frac{d\eta}{dt} = K(t)R(x, y, z)$$

- Si $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ sont non nul, alors :

$$\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{P(x, y, z)} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{Q(x, y, z)} = \frac{\frac{d\eta}{dt}}{R(x, y, z)} \tag{1}$$

Si P est nul, $\frac{d\varphi}{dt}$l'est aussi, de même si Q est nul $\frac{d\psi}{dt}$ l'est ou si R est nul $\frac{d\eta}{dt} = 0$. Par hypothèses on suppose P, Q, R non nuls simultanément.

Remarque 10 *On convient d'écrire toujours la relation (1) même si l'un des dénominateur est nul, dans ce cas le numérateur correspondant l'est aussi.*

1.3 Intégrales premières de (S)

Définition 11 *On appelle intégrale première du système* (S) *une fonction* u *de classe* C^1 *des trois variables* x, y, z *non constante, et telle que pour toute solution* (φ, ψ, η) *de* (S) *la fonction* $u(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))$ *soit constante.*

Si on considère un système dans $\mathbb{R}^2$*, une intégrale première est une fonction de deux variables telle que* $u(\varphi(t), \psi(t))$ *soit constante.*

Théorème 12 *une fonction* u *des classes* C^1 *est une intégrale première de* (S) *si est seulement si dans tout domaine où les solutions de* (S) *sont définies, elle vérifie :*

$$P(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} = 0$$

Preuve. Soit $u(\varphi, \psi, \eta)$ une solution de (S)

$$\frac{d\left[u(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\right]}{dt} = \frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))}{\partial y}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))}{\partial z}\frac{d\eta}{dt}$$

or $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ sont proportionnels à P, Q, R respectivement et $u(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))$est constante donc :

$$P(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} = 0$$

en tout point $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \eta(t)$ d' une solution γ. ■

1.3.1 Fonctions indépendantes

Définition 13 *1) on dit que deux fonctions* u *et* v *de classe* C^1 *dans un ouvert* G *de* $\mathbb{R}^3$ *sont fonctionnellement indépendantes si les seules fonctions differentiables* H *des deux variables* u *et* v *qui vérifient :* $H(u(x,y,z), v(x,y,z))$ *est constante dans* G *sont les constantes.*

2) de façon analogue u, v, w *de classe* C^1 *dans* G *sont fonctionnellement indépendantes si les seules fonctions differentiables* F *des trois variables* u, v, w *qui vérifient* $F(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ *est constante dans* G *sont les constantes.*

Théorème 14 1) *Deux fonctions* u *et* v *sont fonctionnellement indépendantes dans* G *si et seulement si : Le rang du tableau*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est deux dans G

2) *Trois fonctions* u, v, w *sont fonctionnellement indépendantes dans* G *si et seulement si le rang du Jacobien*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est trois dans G

Preuve. 1) Supposons u et v fonctionnellement indépendantes soit (a, b) une solution du système :

$$(I) \begin{cases} a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ a\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ a\frac{\partial u}{\partial z} + b\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Soit $H(u, v) = au + bv$ alors $H(u(x, y, z), v(x, y, z))$ à des dérivées partielles nulles dans G, elle est donc constante, par conséquent $H(u, v)$ est constante ce qui impose $a = b = 0$, ainsi la solution de (I) est $a = b = 0$, le système est donc de rang 2.

2) Supposons Δ de rang deux et soit $H(u, v)$ une fonction telle que $H(u(x, y, z), v(x, y, z))$ soit constante dans G, alors ses dérivées partielles sont nulles donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(u(x,y,z), v(x,y,z))}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial H(u(x,y,z), v(x,y,z))}{\partial v}\frac{dv}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial H(u(x,y,z), v(x,y,z))}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial H(u(x,y,z), v(x,y,z))}{\partial v}\frac{dv}{dy} &= 0 \\ \frac{\partial H(u(x,y,z), v(x,y,z))}{\partial u}\frac{du}{dz} + \frac{\partial H(u(x,y,z), v(x,y,z))}{\partial v}\frac{dv}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

Δ étant de rang 2 le système (I) n'a que la solution $a = b = 0$ donc

$$\frac{\partial H(u(x,y,z), v(x,y,z))}{\partial u} = 0 = \frac{\partial H(u(x,y,z), v(x,y,z))}{\partial v}$$

et H est constante dans G. ■

Théorème 15 *1) Soient u et v deux intégrales premières indépendantes de*

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Toute Intégrale première w de ce système s'exprime alors en fonction de u et v, c'est-à-dire qu'il existe F de classe C^1 telle que $w = F(u,v)$.

2) Soit u une intégrale première de $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$, toute intégrale première v de ce système s'exprime en fonction de u : il existe H tel que $v = H(u)$.

Preuve. Etablissant la première partie du théorème : soient u, v, w trois intégrales premières, alors :

$$\begin{cases} P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ P\frac{\partial w}{\partial x} + Q\frac{\partial w}{\partial y} + R\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

comme P, Q et R ne sont pas simultanément nuls le système (II) :

$$\begin{cases} a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

a une solution autre que $a = b = c = 0$.

Elle n'est donc pas de rang 3 : le jacobien$\frac{\Delta(u,v,w)}{\Delta(x,y,z)}$ est nul donc u, v, w ne sont pas indépendantes, il existe une relation que l'on peut supposer écrite sous la forme $F(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ où F est une fonction de classe C^1 non identiquement nulle. En dérivant la relation $F(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) = 0$, on constate que $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial w}$ sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

comme u et v sont indépendantes $\frac{\partial F}{\partial w}$ ne peut-être nul sans que $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ le soient ce qui est impossible. D'après le théorème des fonctions implicites $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$ implique que on peut exprimer w en fonction de u et v.

La seconde partie se démontre d'une façon tout à fait analogue ■

1.3.2 Résolution de (S)

Théorème 16 (Méthode pratique) *1) Pour trouver une intégrale première u de $\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$ On utilise l'égalité $\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$ pour trouver A et B telles que*

a) il existe u vérifiant $du = A(x,y)dx + B(x,y)dy$.

b) $A(x,y)P(x,y) + B(x,y)Q(x,y) = 0$.

2) On procedé de façon analogue pour résoudre $\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$ on cherche u et v indépendante telles que :

a) il existe u vérifiant $du = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$.

b) $A(x,y,z)P(x,y,z) + B(x,y,z)Q(x,y,z) + C(x,y,z)R(x,y,z) = 0$

Exemple 17 *Résoudre $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$ (S)*

on a

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{xdx - ydy}{xy - xy} = \frac{d(1/2(x^2 - y^2))}{0}$$

donc $x^2 - y^2$ est une intégrale première. Les solutions de (S) sont donc les courbes $x^2 - y^2 = a$ où $a \in IR$

1.3.2.1 Méthode paramétrique

On peut quelque fois introduire un paramètre supplémentaire, en posant

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = ds,$$

on trouve alors les solutions sous la forme paramétrique en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = P \\ \frac{dy}{ds} = Q \\ \frac{dz}{ds} = R \end{cases} .$$

Exemple 18 *Reprenant le système* $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = ds$, *on a donc* $\frac{dx}{ds} = y$ *et* $\frac{dy}{ds} = x$ *ce qui donne* $\frac{d^2x}{ds^2}$ *alors*

$$\begin{aligned} x(s) &= Ae^{s} + Be^{-s} \\ y(s) &= Ae^{s} - Be^{-s}, \end{aligned}$$

qui une représentation paramétrique de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 4AB$.

1.4 Equation aux dérivées partielles quasi linéaire du premier ordre

1.4.1 Solution générale de $f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z)$

Définition 19 *Nous appellerons équation aux dérivées partielles quasi linéaire du premier ordre dont l'inconnue est la fonction* $z(x,y)$ *une équation de la forme*

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z) ....(E)$$

Nous supposerons f, g *et* h *de classe* C^1.

Définition 20 *Soit l'équation* (E) *le système suivant :*

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)} \qquad (S)$$

s'appelle système caractéristiques de (E).

Théorème 21 (Méthode pratique) *Pour résoudre* (E) *(où* h *est non identiquement nulle) :*

1) On examine si $h(x,y,z)=0$ définit une solution.

2) Dans le domaine $h(x,y,z)\neq 0$, on cherche deux intégrales premières u et v du système caractéristiques (S) :

$$\frac{dx}{f(x,y,z)}=\frac{dy}{g(x,y,z)}=\frac{dz}{h(x,y,z)}$$

Toute solution est alors définie par

$$F(u(x,y,z),v(x,y,z))=0.$$

Il faut qu'au moins une des fonctions u et v dépende de z.

Exemple 22 *Soit (E) :*

$$z\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{1-z^2}$$

1) $\sqrt{1-z^2}=0$ définit deux solution $z=+1$ et $z=-1$.

2) Soit $|z|<1$; le système caractéristique est

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

, y est une intégrale première, en netant que $dx=\frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}}$, on constate que $x+\sqrt{1-z^2}$ est également une intégrale première.

Toute solution est définie implicitement par

$$F(y,\ x+\sqrt{1-z^2})=0,$$

ou aussi bien par

$$\varphi(y)=x+\sqrt{1-z^2},$$

c'est à dire

$$z^2=1-(x-\varphi(y))^2,$$

φ étant une fonction de classe C^1 telle que $|x-\varphi(y)|<1$.

1.4.2 Cas particulier $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Théorème 23 (Méthode pratique) *Soit* (E) *:*

$$f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

et (S) :

$$\frac{dx}{f(x,y)}=\frac{dy}{g(x,y)}$$

son système caractéristique. Pour résoudre (E) *on cherche une integrale première* u *de* (S)*. Toute solution de* (E) *est alors de la forme* $z=F(u)$ *où* F *est de classe* C^1.

Exemple 24 *Soit* (E);

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Le système caractéristique est

$$\frac{dx}{y}=\frac{-dy}{x}$$

donc x^2+y^2 *est une intégrale première de* (S) *et toutes les solutions sont de la forme*

$$z=F(x^2+y^2)$$

1.5 Problème de Cauchy

1.5.1 Courbes caractéristiques

Définition 25 *on appelle courbes caractéristiques de l' équation* (E) :

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y,z)$$

les solution de son système caractéristique (S) :

$$\frac{dx}{f(x,y,z)}=\frac{dy}{g(x,y,z)}=\frac{dz}{h(x,y,z)}$$

Définition 26 *On dit que une courbe* γ *n'est caractéristique en aucun point pour l'équation* (E)*, s'il n'existe aucun point de* γ *où la tangente est parallèle au vecteur* $V=f\vec{e}_1+g\vec{e}_2+h\vec{e}_3$.

Théorème 27 *Par toute courbe γ caractéristique en aucun point, passe une solution unique de (E), on l'appelle la solution au problème de Cauchy relatif à γ*

Définition 28 *Trouver la relation entre a et b qui entraîne que pour tout t on ait à la fois $u(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) = a$ et $v(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) = b$ s'appelle éliminer t entre les équations $u(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) = a$ et $v(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) = b$.*

Théorème 29 (Méthode pratique de résolution du probleme de Cauchy) *Soit (E) :*

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z)$$

et (S) :

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)}$$

son système caractéristique. Pour trouver la solution de (E) qui contient une courbe γ non caractéristique d'équation $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \eta(t)$, on élimine t entre les équations $u(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) = a$ et $v(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) = b$ obtenues au moyen de 2 intégrales premières u et v de (S), ceci définit une fonction $H(a,b) = 0$ l'équation de la solution est

$$H(u(x,y,z), v(x,y,z)) = 0$$

si $h \equiv 0$, on n'oubliera pas que z est une intégrale première.

Exemple 30 *Cherchons les solutions de (E) :*

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

qui passent par l'ellipse γ d'équation

$$z = my, x^2 + (y-1)^2 = r^2.$$

Nous avons que : $u = z$ et $v = x^2 + y^2$ sont de intégrales premières. La courbe γ a pour équation

$$x^2 = r^2 - (y-1)^2, y = t, z = mt$$

il faut donc éliminer t entre $mt = a$ et $r^2 - (y-1)^2 = b$ ce qui impose $m \neq 0$ et donne

$$b - r^2 - \frac{2a}{m} - 1 = 0, H(u,v) = \frac{2u}{m} - v + r^2 - 1$$

et la solution est :

$$2z = m(x^2 + y^2 - r^2 - 1).$$

1.6 Equation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre

Définition 31 *Soit (S_λ) une famille de surfaces dépendant d'un paramètre λ d'équation*

$$F(x,y,z,\lambda) = 0.$$

On suppose F de classe C^2 et $\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \neq 0$.

On appelle courbe caractéristique de la surface S_λ la courbe T_λ si elle existe, située sur S_λ d'équations

$$T_\lambda \begin{cases} F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

La surface Σ engendrée par les courbes T_λs'appelle l'enveloppe de la famille (S_λ), Σ et S_λ sont tangentes le long de T_λ.

L' équation de Σ s'obtient en éliminant λ entre les équations de T_λ.

1.6.1 Famille à deux paramètres

Définition 32 *Soit $(S_{\lambda,\mu})$ une famille de surfaces dépendant de deux paramètres λ et μ d'équation*

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = 0,$$

on suppose F de classe C^2 et qu'une des dérivées d'ordre deux en λ et μ est non nulle.

1) On appelle point caractéristique de $(S_{\lambda,\mu})$ *un point tel que :*

$$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda,\mu)=0 \\ \frac{\partial F(x,y,z,\lambda,\mu)}{\partial \lambda}=0 \\ \frac{\partial F(x,y,z,\lambda,\mu)}{\partial \mu}=0 \end{cases}.$$

L'ensemble des points caractéristiques, s'il n'est pas vide, forme une surface Σ *appelée enveloppe de la famille à 2 paramètres* $(S_{\lambda,\mu})$*. Son équation s'obtient en éliminant* λ*et* μ *entre les trois équations. Toutes les surfaces* $S_{\lambda,\mu}$ *sont tangentes à* Σ *en leurs points caractéristiques.*

2) Soit φ *une fonction de classe* C^2*, si la famille* $F(x,y,z,\lambda,\varphi(\lambda))$ *admet une enveloppe* Σ_φ*, celle-ci s'appelle enveloppe à* 1 *paramètre de la famille* $(S_{\lambda,\mu})$*. Les surfaces* Σ_φ *sont tangentes à* Σ*.*

1.6.2 Equation aux dérivées partielles associée à une famille de surfaces à deux paramètres

Notation 33 *soit* $z=\varphi(x,y)$*, on notera* $p=\frac{\partial z}{\partial x}$*,* $q=\frac{\partial z}{\partial y}$*.*

Définition 34 *L"équation aux dérivées partielles associée à la famille* $(S_{\lambda,\mu})$ *est la relation qu'on obtient en éliminant* λ *et* μ *entre les équations*

$$F=0, \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p=0, \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q=0.$$

Les surfaces $S_{\lambda,\mu}$ *sont solution de cette équation aux dérivées partielles.*

Définition 35 *Soit* (E) :

$$G(x,y,z,p,q)=0$$

une équation aux dérivées partiellesdu premier ordre et

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=0$$

une famille à deux paramètres de solutions de (E)*. Cette famille s'appelle une intégrale complète de* (E)*. Toute enveloppe à un paramètre s'appelle intégrale générale de* (E)*, s'il existe une enveloppe à deux paramètres, on la nomme intégrale singulière.*

Chapitre II

EQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

2.1 Préliminaires

Une équation aux dérivées partielles équation est une équation de la forme

$$F(x, y, ..., u, u'_x, u'_y, ..., u''_{xx}, u''_{yy}, u''_{xy}, ...) = 0, \qquad (1)$$

où $u = u(x, y)$ est la fonction inconnue des variables réelles x, y à déterminer, et F est une fonction donnée (pour ce chapitre u et F sont des fonctions réelles), x, y sont les variables indépendantes avec

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u'_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u''_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u''_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u''_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

- L'équation (1) est dite linéaire si F est une fonction linéaire dans les quantités $u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{yy}, u''_{xy} ...$, par exemple l'équation aux dérivées partielles linéaire de second ordre de deux variables indépendantes x et y est :

$$au''_{xx} + bu''_{xy} + cu''_{yy} + ku'_x + lu'_y + mu = f$$

où a, b, c, k, l, m et f sont des fonctions de x et y

Définition 36 *on appelle ordre d'une équation aux dérivées partielles l'ordre de la plus grande dérivées présente dans l'équation.*

Remarque 37 *Soit*

$$au''_{xx} + bu''_{xy} + cu''_{yy} + ku'_x + lu'_y + mu = f$$