**Série N°2**

**Exercice 1 :** Soit l'équation en temps discret suivante :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = f(x_n).$$

1) Déterminer les points fixes et étudier leurs stabilités.
2) Tracer la construction graphique des solutions dans le plan $(x_n, x_{n+1})$.

**Exercice 2 :** Le modèle suivant est basé sur la relation de stock-recrutement proposée par Ricker (1954) dans le cadre de l'étude de la dynamique de populations de poissons, où $r > 0$ est le taux de croissance de la population et $K > 0$ sa capacité limite.
1) Montrer que ce modèle admet deux points fixes : 0 et $K$.
2) Montrer que 0 est toujours instable et que $K$ est stable lorsque $0 < r < 2$.
3) Construire avec Matlab le diagramme de bifurcation du modèle de Ricker.

**Exercice 3 :** Rechercher le comportement asymptotique du modèle de Leslie défini par la matrice $L$ suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4 :** Rechercher le comportement asymptotique du modèles de Leslie ou D'Usher défini par les matrices $L$ suivantes :

$$1)\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_4 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $s_1 = s_2 = s_3 = 0.2$ et $f_4 = 10$.

$$2)\ L = \begin{pmatrix} 0 & f_2 & f_3 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & p_4 \end{pmatrix},$$

avec $s_1 = s_2 = s_3 = 0.5$, $f_2 = 4$, $f_3 = 16$ et $p_4 = 0.2$.

a) Indiquer si la matrice est réductible, irréductible, cyclique (en précisant l'indice d'imprimitivité) ou primitive. Si la matrice est réductible, indiquer comment la décomposer.

b) Rechercher le taux de croissance asymptotique. Écrire pour cela l'équation caractéristique et, si nécessaire, en rechercher une solution évidente.

c) Préciser si la population est en croissance, en extinction ou en équilibre.

**Exercice 5** Le modèle suivant est une généralisation du modèle de Nicholson-Bailey qui décrit la dynamique d'un système hôte-parasitoïde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n \left(1 + \frac{a y_n}{b}\right)^{-b}, \\ y_{n+1} &= c x_n \left(1 - \left(1 + \frac{a y_n}{b}\right)^{-b}\right) \end{aligned}$$

où $x_n$ et $y_n$ sont respectivement le nombre d'hôtes et le nombre de parasitoïdes à la génération $n$. $\lambda$, est le taux de croissance intrinsèque des hôtes. $a$ et $b$ sont deux paramètres strictement positifs, $c$, est le nombre moyen de parasitoïdes viables issus d'un seul hôte parasité.

1) a) Pour quelle valeur de $b$ on retrouve le modèle de Nicholson-Bailey ?
   b) Réécrire le modèle dans ce cas et étudier la stabilité des points fixes.
   c) Est-ce que il y a une possibilité de coexistence d'un hôte et son parasitoïde ?
2) Supposons maintenant que $b$ est fini.
   a) Trouver les points fixes et étudier leurs stabilités.
   b) Pour quelles valeurs de $b$ y a t-il une possibilité de coexistence d'un hôte et son parasitoïde ?