Table des matières

Chapitre 1

Intégrales généralisées (impropres)

Ce chapitre consiste principalement à généraliser la notion des intégrales de Riemann à des fonctions non bornées définies sur des intervalles non nécessairement bornés.

1.1 Convergence des intégrales généralisées

Définition 1.1.1. *Soit $f : [a, b[$(ou $b = +\infty$)$\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ (i.e sa restriction à chaque compact de $[a, b[$ est intégrable au sens de Riemann), et soit F la fonction définie sur $[a, b[$ par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{pour tout } x \in [a, b[\,. \tag{1.1}$$

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge, si et seulement si $\lim_{x\to b^-} F(x)$ *existe. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge.*

Remarque 1.1. *Soit $f : [a, b[$(ou $b = +\infty$)$\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable*

sur $[a, b[$.
Pour tout $c \in [a, b[$, *on peut écrire :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt. \tag{1.2}$$

Puisque $\int_a^c f(t)dt$ *converge toujours (intégrale de Riemann), les intégrales généralisées* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *sont donc de même nature.*

Définition 1.1.2. *Soit maintenant* $f :]a, b]$*(ou* $a = -\infty$*)*$\rightarrow \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$ *) une fonction localement intégrable sur* $]a, b]$ *et soit* F *la fonction définie sur* $]a, b]$ *par :*

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt, \text{pour tout } x \in]a, b]. \tag{1.3}$$

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ *converge, si et seulement si* $\lim_{x\to a^+} F(x)$ *existe. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge.*

Définition 1.1.3. *Soit* f *une fonction localement intégrable sur* $]a, b[$*où* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et soit* $c \in]a, b[$.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente, si et seulement les deux intégrales généralisées* $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *sont convergentes. Dans le cas contraire on dit que cette intégrale est divergente.*

Exemple 1.1.1. *Considérons l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$. *Puisque :*

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = -1 + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, \text{ quand } x \rightarrow 0^+, \tag{1.4}$$

l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ *diverge, cependant*

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1, \text{ quand } x \rightarrow +\infty. \tag{1.5}$$

donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *converge. On en déduit que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *diverge.*

Proposition 1.1.1. *Soient* f *et* g *deux fonctions localement intégrables sur* $[a, b[$.
1. Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *convergent, alors l'intégrale* $\int_a^b (f(t) + g(t))\, dt$ *est aussi converge, et de plus :*

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\, dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt. \tag{1.6}$$

Par contre, si l'une des deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt$ diverge.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors lintégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^b \alpha f(t)dt$ l'est aussi et de plus :

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt. \tag{1.7}$$

Proposition 1.1.2. *La preuve de cette proposition est basé sur la linéarité des intégrales de Riemann et sur les théorèmes sur la somme et le produit de limites.*

1.2 Formules d'intégration des intégrales généralisées

Les deux théorèmes qui suivent sont très utiles dans l'étude des intégrales généralisées :

1.2.1 Intégration par parties

Théorème 1.2.1. *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $]a,b[$. Si l'intégrale $\int_a^b \dot{f}(t)g(t)dt$ converge et si la fonction fg possède une limite à droite de a et une limite à gauche de b, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\dot{g}(t)dt$ converge et on a :*

$$\int_a^b \dot{f}(t)g(t)dt = \left(\lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)g(x)\right) - \int_a^b \dot{f}(t)g(t)dt \tag{1.8}$$

Démonstration. Elle repose sur le fait que la fonction fg est la primitive de la fonction $\dot{f}g + f\dot{g}$ sur l'intervalle compact $[a,x]$ et du fait que la fonction fg possède une limite à droite de a et une limite à gauche de b, □

1.2.2 Changement de variables

Théorème 1.2.2. *Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ et soit φ une fonction bijective de classe C^1 sur $]\alpha,\beta[$, vérifiant $a = \lim_{x\to\alpha^+} \varphi(x)$ et $b = \lim_{x\to\beta^-} \varphi(x)$.*

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_\alpha^\beta \dot{\varphi}(x)f(\varphi(x))dx$ *ont de même nature, de plus, si elles convergent, on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta \dot{\varphi}(x)f(\varphi(x))dx \tag{1.9}$$

Démonstration. Elle repose sur le changement de variable $t = \varphi(x)$ et le fait que $a = \lim_{x\to\alpha^+} \varphi(x)$ et $b = \lim_{x\to\beta^-} \varphi(x)$.

□

1.3 Intégrale généralisée des fonctions de signe constant

Dans la suite, on s'intéresse au cas où les fonctions f et g sont localement intégrables et de signe constant sur l'intervalle $[a,b[$ ou $]a,b]$.
En particulier, nous allons énoncer tous les résultats dans le cas où les fonction f et g sont positives. Si les fonction f et g sont négative, on va étudier l'intégrale des fonctions $-f$ et $-g$.

Théorème 1.3.1. *Soit* f *une fonction positive et localement intégrable sur* $[a,b[$*. Alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *converge si et seulement si la fonction*

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b[, \tag{1.10}$$

est majorée sur $[a,b[$*, et de plus, on a*

$$\text{pour tout } x \in [a,b[\,; F(x) \leq \int_a^b f(t)dt, \tag{1.11}$$

Démonstration. Puisque f est positive, la fonction F est donc croissante. Mais pour que $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe , il faut et il suffit que F soit majorée, et on a

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt. \tag{1.12}$$

□

1.3.1 Comparaison des intégrales généralisées de deux fonctions positives

Théorème 1.3.2. *(théorème de comparaison) Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ vérifiant :*

$$0 \leq f(t) \leq g(t). \tag{1.13}$$

1. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est aussi convergente, et on a :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt. \tag{1.14}$$

2. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est aussi divergente.

Démonstration. Pour faire la preuve de ce théorème, supposons par exemple que f et g sont définie sur $[a, b[$.
Pour tout $x \in [a, b[$, on a

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt = G(x). \tag{1.15}$$

1. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, G est majorée, F l'est également, d'où le résultat.
2. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, cela signifie que $\lim_{x \to b^-} F(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \to b^-} G(x) = +\infty$ et l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge. □

Corollaire 1.3.1. *Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b[$ vérifiant :*

$$f(t) = O(g(t)), \text{ quand } t \to b^-. \tag{1.16}$$

1. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est aussi convergente
2. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est aussi divergente.

Démonstration. Par définition $f(t) = O(g(t))$, quand $t \to b^-$ si et seulement si :

$$\exists t_0 \in [a, b[\,, \text{ et } \exists c > 0, \text{ tel que } \forall t \in [t_0, b[\,, \text{ on a } f(t) \leq cg(t). \tag{1.17}$$

Le reste de la preuve découle immédiatement du théorème 1.3.2. □

Corollaire 1.3.2. *Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b[$ vérifiant :*

$$\lim_{t \to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = 0. \tag{1.18}$$

1. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est aussi convergente
2. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est aussi divergente.

Démonstration. Par définition $\lim_{t \to b^-} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 0$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists t_0 \in [a, b[\,,\ , \text{ tel que } \forall t \in [t_0, b[\,, \text{ on a } \frac{f(t)}{g(t)} < \epsilon. \tag{1.19}$$

Le reste de la preuve découle immédiatement du théorème 1.3.2, en prenant $\epsilon = 1$. □

1.3.2 Intégrale généralisée de deux fonctions positives équivalentes

Définition 1.3.1. *On rappelle que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage d'un point t_0 si et seulement si :*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1. \tag{1.20}$$

Théorème 1.3.3. *Soient f et g deux fonctions positives équivalentes à l'extrémité de l'intervalle d'intégration $[a, b[$ ou $]a, b]$. Alors les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et dt $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*

Démonstration. Supposons par exemple que f et g sont définie sur $[a, b[$.
Par définition :

$$\lim_{t\to x_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha \in [a, b[\,, \text{ tel que } \forall t \in [\alpha, b[\,, \text{ on a } (1-\epsilon)g(t) \leq f(t) \leq (1+\epsilon)g(t). \tag{1.21}$$

Pour $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ fixé, on a alors

$$\forall t \in [\alpha, b[\,, \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t). \tag{1.22}$$

On peut donc appliquer le théorème 1.3.2 : Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, $\int_a^b f(t)dt$ l'est aussi par l'inégalité de droite et si $\int_a^b f(t)dt$ converge, $\int_a^b g(t)dt$ l'est aussi par l'inégalité de gauche.
On fait une démonstration analogue pour montrer que si l'une des intégrales diverge, alors il en est de même pour l'autre. □

Proposition 1.3.1. *(Les fonctions de Riemann)*
1. Soit f une fonctions localement intégrables sur $[1, +\infty[$. Alors l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Soit maintenant f une fonctions localement intégrables sur $]0, 1]$. Alors l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. 1. Un calcul simple, on trouve :

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right), \text{ si } \alpha \neq 1, \\ \ln x, \text{ si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Ces fonctions admettent des limites finies au voisinage de l'infinie seulement dans le cas où $\alpha > 1$.
2. De même, pour $x \in]0, 1[$

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \dfrac{-1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right), \text{ si } \alpha \neq 1, \\ -\ln x, \text{ si } \alpha = 1. \end{cases} \tag{1.23}$$

Ces fonctions admettent des limites finies au voisinage de zéro seulement dans le cas où $\alpha < 1$. □

Remarque 1.2. *L'utilisation d'un changement de variable $t \mapsto t - t_0$, nous permet d'appliquer aussi les arguments précédent aux fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{(t-t_0)^\alpha}$ sur les intervalles semi-ouverts $]t_0, b]$ et $[b, +\infty[$, tel que $b > t_0$.*

1.4 Critères généraux de convergence

1.4.1 Critère de Cauchy

Théorème 1.4.1. *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. Pour que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall x, y \in [a, b[, b - \delta < x < y < b, \text{ on a } \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \epsilon. \tag{1.24}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy à la fonction réelle $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et le fait que $F(x) - F(y) = \int_x^y f(t)dt$. □

1.4.2 Critère d'Abel-Dirichlet

Lemme 1.4.1. *Soit f une fonction de classe C^1, positive, décroissante sur $[a, b[$ et tend vers 0 quand x tend vers b, et soit g une fonction continue sur $[a, b[$ vérifiant la propriété :*

$$\exists M > 0, \forall x, y \in [a, b[\,, \left| \int_x^y g(t)dt \right| \leq M. \tag{1.25}$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge, et pour tout $x \in [a, b[$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq Mf(x). \tag{1.26}$$

Démonstration. Par définition

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall x \in [b - \delta, b[\,,\ f(x) < \frac{\epsilon}{M}. \tag{1.27}$$

Soit maintenant x fixé dans $[a, b[$ et posons $G(y) = \int_x^y g(t)dt$.
En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\int_x^y f(t)g(t)dt = f(y)G(y) + \int_x^y (-\acute{f}(t))G(t)dt. \tag{1.28}$$

Donc pour tous $y \geq x \geq a$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^y f(t)g(t)dt\right| &\leq \left|f(y)G(y)\right| + \int_x^y \left|(-\dot{f}(t))G(t)\right| dt \\
&\leq Mf(y) + \int_x^y (-\dot{f}(t))Mdt \\
&= Mf(y) + Mf(x) - Mf(y) \\
&= Mf(x). \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.27), on trouve :

$$\left|\int_x^y f(t)g(t)dt\right| < \epsilon. \qquad (1.30)$$

Le critère de Cauchy nous permet alors d'affirmer que l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge. De plus, en faisant tendre y vers b dans l'inégalité (1.30), on obtient l'inégalité (1.26). □

1.5 Convergence absolue ou semi-convergence

Soit f une fonctions localement intégrables sur $[a, b[$.

Définition 1.5.1. *On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument si et seulement si l'intégrale $\int_a^b \left|f(t)\right| dt$ converge.*

Définition 1.5.2. *On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente lorsqu' elle est convergente sans être absolument convergente.*

Théorème 1.5.1. *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et de plus :*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b \left|f(t)\right| dt. \qquad (1.31)$$

Démonstration. La preuve se déroule en utilisant le critère de Cauchy et le fait que :

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_x^y \left|f(t)\right| dt, \text{ pour tout } x, y \in [a, b[\qquad (1.32)$$

□

Exemple 1.5.1. *Considérons la fonction f définie sur* $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ *par* $f(x) = \frac{\sin t}{t^2}$. *Pour tout* $t \in v$*, on a :*

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \frac{1}{t^2}. \tag{1.33}$$

Puisque l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *converge, on en déduit que* $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t)dt$ *converge absolument, donc elle converge.*

Le théorème suivant est très utilisé dans la pratique.

Théorème 1.5.2. *Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle* $[a, +\infty[$*, où* $a > 0$*, telle qu'il existe* $\alpha > 1$ *vérifiant* $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha \left|f(t)\right| = 0$*. Alors l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge absolument.*

Démonstration. Par définition

$$\lim_{t\to+\infty} t^\alpha \left|f(t)\right| = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists A > a \text{ tel que } \forall t \in [A, +\infty[\text{ , on a } \left|f(t)\right| < \frac{\epsilon}{t^\alpha}.$$

Puisque l'intégrale de Riemann $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge, l'utilisation du théorème de comparaison 1.3.2 montre la convergence absolue de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$
. □

1.6 Intégrales généralisées et séries numériques

Dans cette section, on va donner quelques résultats précisant le lien entre les intégrales généralisées et séries numériques .

Théorème 1.6.1. *Soit f une fonction localement intégrable, a un signe constant et décroissante sur l'intervalle* $[1, +\infty[$*. Pour que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ *soit convergente, il faut et il suffit que la série numérique de terme général* $u_n = f(n)$ *soit convergente.*

Démonstration. Plaçons nous dans le cas où f est une fonction positive, et soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$.
Puisque f est décroissante sur $[1, +\infty[$, on peut écrire :

$$\text{pour tout } k = 1, 2, ..., \ x \in [1, +\infty[\,, \text{ tel que } k \leq x \leq k+1, \text{ on a } f(k+1) \leq f(x) \leq f(k). \tag{1.34}$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on trouve :

$$f(k+1) \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leq f(k), \text{ pour tout } k = 1, 2, ... \tag{1.35}$$

En sommant ces dernières égalités, on obtient :

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S_n. \tag{1.36}$$

* Supposons que $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ converge, on peut voire alors :

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx. \tag{1.37}$$

ce qui montre que la suite (S_{n+1}) est majorée, et par suite la série converge $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$.
Supposons maintenant que $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ converge. On sait bien que :

$$n \leq x < n+1, \text{ por tout } x \geq 1, \tag{1.38}$$

où l'entier n représente la partie entière de x. On a alors :

$$\int\limits_{1}^{x} f(x)dx \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S_n. \tag{1.39}$$

Puisque (S_n) est majorée, l'intégrale $\int\limits_{1}^{x} f(x)dx$ l'est assi, ce qui assure l'existence de l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Il en résulte également par contraposée, que la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ entrâine la divergence de l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

□

Théorème 1.6.2. *Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. La suite numérique de terme général $F(x_n) = \int\limits_{a}^{x_n} f(x)dt$ converge, , où $(x_n)_n$ est une suite d'élément de $[a, +\infty[$ de limite $+\infty$, quand $n \longrightarrow +\infty$.
3.. La série numérique de terme général $u_n = \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dt$ converge, où $(x_n)_n$ est une suite d'élément de $[a, +\infty[$ de limite $+\infty$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

Démonstration. Montrons 1$\Rightarrow$ 2. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \geq \delta, \text{ on a } \left| \int_a^{+\infty} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right| = \left| \int_x^{+\infty} f(t)dt \right| < \epsilon. \tag{1.40}$$

Soit maintenant $(x_n)_n$ une suite d'élément de $[a, +\infty[$ de limite $+\infty$, quand $n \longrightarrow +\infty$, i.e

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \text{ on a } x_n \geq A \tag{1.41}$$

Prenons $A = \delta$, donc pour tout $n \geq n_0$, et pour tout $x_n \geq \delta$, on a :

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t)dt - F(x_n) \right| = \left| \int_a^{+\infty} f(t)dt - \int_a^{x_n} f(t)dt \right| = \left| \int_x^{+\infty} f(t)dt \right| < \epsilon. \tag{1.42}$$

D'où la suite $F(x_n) = \int\limits_{a}^{x_n} f(n)dt$ converge.

Montrons maintenant 2 $\Rightarrow$ 1. Supposons que $F(x_n) = \int\limits_{a}^{x_n} f(x)dt$ converge et que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ne converge pas, on a alors :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \text{ on peut trouver } x > \delta, \text{ tel que } \left| \int_a^{+\infty} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right| \geq \epsilon. \tag{1.43}$$

Par suite on peut trouver une suite d'élément (x_n) de $[a, +\infty[$ vérifiant :

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt - \int_a^{x_n} f(t)dt\right| = \left|\int_a^{+\infty} f(t)dt - F(x_n)dt\right| \geq \epsilon,$$

ce qui contredit l'hypothèse que $(F(x_n))_n$ converge.

Finalement, Montrons que 2 $\Leftrightarrow$ 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(n)dt = \int_a^{x_0} f(n)dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(n)dt. \tag{1.44}$$

Par conséquent la suite numérique $(F(x_n))_n$ converge si et seulement si la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(n)dt$ converge. □

Corollaire 1.6.1. *De la même manière, lorsque f est une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a, +b[$, on peut démontrer facilement que lintégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si la suite numérique de terme général $F^*(x_n) = \int_a^{b-x_n} f(x)dt$ converge, , où $(x_n)_n$ est une suite d'élément de $[a, +b[$ de limite 0, quand $n \to +\infty$.*

1.7 Intégrales généralisées et suites numériques

Théorème 1.7.1. *(Théorème de convergence dominée) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions localement intégrables sur $[a, b[$, qui converge uniformément localement sur $[a, b[$ vers une fonction f, et soit g une fonction positive et localement intégrable sur $[a, b[$ vérifiant les deux propriètè suivantes :*

1. *L'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a, b[$, on a*

$$|f_n(t)| \leq g(t). \tag{1.45}$$

Alors les deux intégrales $\int_a^b f_n(t)dt$ ($n \in \mathbb{N}$) et $\int_a^b f(t)dt$ convergent absolument, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt. \tag{1.46}$$

Démonstration. La convergence absolue de l'intégrale $\int_a^b f_n(t)dt$ se déroule de l'inégalité (1.45) et l'utilisation du théorème de comparaison. De plus, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (1.45), on obtient :

$$\text{pour tout } x \in [a, b[\,,\ \left|f(t)\right| \leq g(t). \tag{1.47}$$

On en déduit alors la convergence absolue de l'intégrale $\int_a^b f_n(t)dt$.
Montrons maintenant que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.
Par définition, l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in [b-\delta, b[\,, \text{on a } \left|\int_x^b g(t)dt\right| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.48}$$

D'autre part, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément localement vers f sur $[a, b[$, donc elle converge uniformément vers f sur tout compact $[a, x]$, pour tout x fixé dans $[b-\delta, b[$ i.e :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, x]\ \ n \geq n_0, \text{on a } \left|f_n(t) - f(t)\right| < \frac{\epsilon}{3(x-a)}. \tag{1.49}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| &= \left|\int_a^b \left(f_n(t)dt - f(t)\right) dt\right| \\
&= \left|\int_a^x \left(f_n(t)dt - f(t)\right) dt + \int_x^b \left(f_n(t)dt - f(t)\right) dt\right| \\
&\leq \int_a^x \left|f_n(t) - f(t)\right| dt + \int_x^b \left|f_n(t)\right| dt + \int_x^b \left|f(t)\right| dt \\
&\leq \int_a^x \left|f_n(t) - f(t)\right| dt + 2\int_x^b g(t)dt \\
&\leq \frac{\epsilon(x-a)}{3(x-a)} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

1.8 Formules de la moyenne

1.8.1 Première formule de la moyenne

Théorème 1.8.1. *Soient f et g deux fonctions vérifiants f intégrable et a un signe constant sur $[a, b]$ et g est continue sur le même segment, alors il existe $c \in [a, b]$ vérifiant*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c)\int_a^b f(t)dt. \tag{1.50}$$

Démonstration. Plaçons nous dans le cas où $f(x) > 0$, pour tout $x \in [a, b]$.
Posons $m = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} g(x)$, on peut alors écrire :

$$m\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M\int_a^b f(t)dt, \tag{1.51}$$

D'où

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b f(t)dt} \leq M. \tag{1.52}$$

C'est-à-dire que $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b f(t)dt} \in \left[\inf_{x\in[a,b]} g(x), \sup_{x\in[a,b]} g(x)\right]$.
Puisque g est continue, on peut alors trouver $c \in [a, b]$ vérifiant :

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b f(t)dt} = g(c). \tag{1.53}$$

Ce qui termine la preuve du théorème. □

1.8.2 Seconde formule de la moyenne

Théorème 1.8.2. *Soit f une fonction de classe C^1, positive et décroissante sur $[a, b]$, et soit g une fonction continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ vérifiant*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c f(t)dt. \tag{1.54}$$

Démonstration. Posons $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.
En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)dt &= f(x)G(x) + \int_a^b (-\dot{f}(t))G(t)dt \\ &= f(b)G(b) + \int_a^b (-\dot{f}(t))G(t)dt \text{ (car } G(a) = 0). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Puisque f est croissante (i.e $\dot{f}(x) \leq 0$ sur $[a, b]$)et $f(b) > 0$, on peut alors écrire :

$$f(b)\times m+\int_a^b (-\dot{f}(t))\times mdt \leq f(b)G(b)+\int_a^b (-\dot{f}(t))G(t)dt \leq f(b)\times M+\int_a^b (-\dot{f}(t))\times Mdt, \quad (1.56)$$

où $m = \inf_{x\in[a,b]} G(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} G(x)$ou d'une manière équivalente :

$$mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mf(b). \quad (1.57)$$

C'est-à-dire que $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{f(a)} \in \left[\inf_{x\in[a,b]} G(x), \sup_{x\in[a,b]} G(x)\right]$.
Puisque G est continue, on peut alors trouver $c \in [a, b]$ vérifiant :

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{f(a)} = G(c) = \int_a^c g(t)dt. \quad (1.58)$$

Ce qui termine la preuve du théorème. □

1.9 Valeur principale de Cauchy

Définition 1.9.1. *Soit f une fonction localement intégrable sur $]-\infty, +\infty[$. La valeur principale de Cauchy (ou bien valeur principale de l'intégrale divergente $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$), notée V.P $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\right)$ est l'élément de $\mathbb{R}$ défini par :*

$$V.P\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\right) = \lim_{a\longrightarrow+\infty} \int_{-a}^{a} f(t)dt) \text{ (si cette limite existe).} \quad (1.59)$$

Définition 1.9.2. *Soit maintenant f une fonction admet sur $[a, b]$ un seul point singulier $c \in]a, b[$. La valeur principale de Cauchy (ou bien valeur principale de* *l'intégrale divergente* $\int_a^b f(t)dt$*, notée* $V.P\left(\int_a^b f(t)dt\right)$ *est l'élément de* $\mathbb{R}$ *défini par :*

$$V.P\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \lim_{\epsilon \to \to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(t)dt) + \int_{c+\epsilon}^b f(t)dt\right) \text{ (si cette limite existe).} \tag{1.60}$$

Exemple 1.9.1. *A titre d'exemple, on prend l'intégrale* $\int_0^2 \frac{dt}{t-1}$*. Il est claire que cette intégrale est divergente. On a alors :*

$$\begin{aligned} V.P\left(\int_0^2 \frac{dt}{t-1}\right) &= \lim_{\epsilon \to \to 0}\left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{t-1}) + \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dt}{t-1}dt\right) \\ &= \lim_{\epsilon \to \to 0}\left(\ln \frac{\epsilon}{\epsilon} + \ln \frac{1}{1}\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.61}$$