Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques 2020-2021 Matière *: Analyse 03*

TD N^0:3 (Séries entières)

<u>Exercice n°1</u> Donner le rayon de convergence et calculer la somme de chacune des séries entières suivante :

$$1)\ f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n \qquad 2)\ f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$
$$3)\ f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \qquad 4)\ f_4(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n\ .$$

II) On se donne la série entière $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

1) Trouver le rayon de convergence de cette série et calculer sa somme S.

2) En passant à la limite convenablement justifié calculer $S(1)$ et $S(-1)$.

<u>Exercice n°2</u> On considère une série entière de terme général $a_n t^n$, de rayon de converge $R > 0$, et de somme S. On suppose que S est une solution de l'équation différentielle

$$(1+t^2)\ddot{f}(t) = 2f(t).$$

1) Etablir une relation liant pour chaque$n \in \mathbb{N}$ les coefficients a_n et a_{n+2}.

2) Déterminer la valeur de a_4 puis de a_{2p} , pour tout $p > 2$.

3) On suppose désormais que $S(0) = 0$ et $\dot{S}(0) = 1$. Calculer a_0, a_2 et la valeur de a_{2p+1}, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4) Montrer que la série entière de terme général $a_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $[-1, +1]$. Quel est son rayon de convergence ?

5) Posons $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{\dot{S}(t) - 1}{t}$ pour $t \neq 0$. Calculer la dérivée $\dot{g}$ de g (on trouvera une fraction rationnelle simple).

6) Déduire de 5) une expression explicite de la fonction S.

<u>Exercice n°3</u> On pose$f(t,x) = \frac{x\sin(t)}{x^2 + 1 - 2x\cos(t)}$.

1) Développer f en série entière selon les puissances de x.

2) Calculer : $\int\limits_0^{\pi} f(t,x)dt$.

Res. M. Smail kaouache.