CH II : Problème de Cauchy Abstrait

II-1 Problème de Cauchy homogène :

Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire défini de $D(A) \subset X$ dans X.

Pour $x \in X$ donné le problème de Cauchy abstrait pour A avec la condition initiale x consiste à chercher une solution $u(t)$ pour le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \qquad (1-1)$$

où on entend par solution une fonction $u(t)$ à valeurs dans X telle que $u(t)$ est continue et pour $t \geq 0$, continûment différentiable et

$u(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et que $u(t)$ satisfait (1-1). Notons que puisque $u(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et u est continue au point $t = 0$, (1-1) ne peut avoir de solution pour $x \notin \overline{D(A)}$.

D'après les résultats du chapitre I (précédent) il est clair que si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $T(t)$, le problème de Cauchy abstrait pour A admet une solution, à savoir $u(t) = T(t)x$ pour tout $x \in D(A)$ (théo I-4).

Il n'est pas assez difficile de voir que pour $x \in D(A)$, $u(t) = T(t)x$ est la seule solution du problème (1-1).

Réellement, l'unicité de la solution pour le problème de Cauchy (1-1) peut être garantie par des conditions beaucoup plus faibles comme nous le verrons par la suite.

Donnons d'abord un lemme qu'on utilisera par la suite.

Lemme II-1 :

Soit $u(t)$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{X}$ continue sur $[0,T]$. Si

$$\left\| \int_0^T e^{ns} u(s)\, ds \right\| \leq M \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots \qquad (1-2)$$

alors $u(t) = 0$ sur $[0,T]$.

Théorème II-1 :

Soit A un opérateur linéaire à domaine dense. Si $R(\lambda; A)$ existe pour tout réel $\lambda \geq \lambda_0$ et $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1} \log \|R(\lambda; A)\| \leq 0$

$$(1-3)$$

Alors le problème de Cauchy (1-1) admet au plus une seule solution pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Preuve :

Notons d'abord que $u(t)$ est une solution de (1-1) si et seulement si $e^{\alpha t}u(t)$ est une solution du problème de Cauchy

$$\frac{dv}{dt} = (A + \alpha I)v \ , \quad v(0) = x$$

c'est-à-dire on peut toujours translater A par une constante multipliée par l'identité et supposer que $R(\lambda : A)$ existe pour tout réel λ, $\lambda \geq 0$ et que (1-3) est satisfaite.

Soit $u(t)$ une solution de (1-1) qui satisfait $u(0) = 0$. On démontre que $u(t) = 0$.

Considérons la fonction $t \mapsto R(\lambda : A)u(t)$ pour $\lambda > 0$ puisque $u(t)$ est solution de (1-1) alors :

$$\frac{d}{dt} R(\lambda;A)u(t) = R(\lambda;A)Au(t)$$
$$= \lambda R(\lambda;A)u(t) - u(t).$$

ie

$$R(\lambda;A)u(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} u(\tau)d\tau \qquad (1-4)$$

Donc de (1-3) on peut facilement voir que pour $\sigma > 0$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\sigma\lambda} \|R(\lambda:A)\| = 0$$

donc il s'ensuit de (1-4) que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-\tau)} u(\tau)d\tau = 0 \qquad (1-5)$$

Alors d'après le lemme II-1 on déduit que

$$u(\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \tau \leq t - \nabla$$

et puisque t et ∇ sont arbitraires alors

$$u(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0 .$$

Du théorème précédent il s'ensuit que pour obtenir l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1-1) il n'est pas nécessaire de supposer que A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe ou ce qui est équivalent à ce que pour un certain $w \in \mathbb{R}$, $\rho(A) \supset]w, +\infty[$ et $\|(\lambda - w)^n R(\lambda; A)^n\| \leq M$ pour $\lambda > w$, ce qui

est beaucoup moins suffisant pour l'unicité.
De même pour l'existence de la solution de (1-1) il n'est pas nécessaire de supposer que A est aussi le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe. En choisissant l'ensemble D des conditions initiales, la solution de (1-1) peut exister sous des hypothèses beaucoup plus faibles. Cependant pour obtenir l'existence et l'unicité pour tout $x \in D(A)$ comme étant une solution différentiable sur $[0, +\infty[$. on doit supposer que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe. Ce qui est donné dans le théorème suivant.

Théorème II-2 :

Soit A un opérateur linéaire, à domaine dense tq $\rho(A) \neq \phi$. Le problème de Cauchy (1-1) admet une unique solution $u(t)$, continûment différentiable sur $[0, +\infty[$, pour toute condition initiale $x \in D(A)$ si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$.

Dans le théorème suivant on va donner un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy (1-1) où la condition initiale $x \in X$.

Théorème II-3 :

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe différentiable alors pour tout $x \in X$ le problème de Cauchy (1-1) avec la condition initiale $x \in X$ admet une unique solution.

Preuve :

L'unicité de la solution découle du théorème II-1. Si $x \in D(A)$ l'existence découle du théorème II-2 (précédent). Si $x \in X$ alors de la différentiabilité de $T(t)x$ il s'ensuit que pour tout $x \in X$

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = A\,T(t)x \quad \text{pour } t > 0$$

et $AT(t)x$ continue pour $t>0$ et donc $T(t)x$ est la solution du problème de Cauchy (1-1).

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe qui n'est pas différentiable. En général si $x \notin D(A)$, le problème de Cauchy (1-1) n'a pas de solution. La fonction $t \mapsto T(t)x$ est alors une solution "généralisée" du problème (1-1) qu'on appelle aussi solution faible. Il existe différentes façons de définir la solution "généralisée" du problème (1-1) ; mais toutes les définitions ont un rapport direct avec $T(t)x$. L'une des définitions de la solution généralisée est donnée comme suit :

Une fonction continue sur $[0, +\infty[$ est une solution généralisée de (1-1) s'il existe $x_n \in D(A)$ tq $x_n \to u(0)$, $n \to +\infty$ et $T(t)x_n \to u(t)$ uniformément sur tout intervalle borné. Il est évident que cette définition de la solution "généralisée" est indépendante du choix de la suite $\{x_n\}$, cette solution généralisée est unique et que si $u(0) \in D(A)$, $u(t)$ est la solution du problème (1-1). Il est clair que pour cette définition de la solution "généralisée" le problème (1-1) admet une solution généralisée pour tout $x \in X$ et que cette solution généralisée est $T(t)x$.

II-2 : Problème de Cauchy non homogène :

Considérons le problème de Cauchy non homogène suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) \ , \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \qquad (2-1)$$

où $f : [0, T[\longrightarrow X$.

Dans toute la suite on suppose que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ et donc le problème homogène correspondant (ie $f=0$) admet une unique solution pour toute condition initiale $x \in D(A)$.

admet une unique solution pour toute condition initiale $x \in D(A)$.

Définition II-1 :

Une fonction $u : [0, T[\longrightarrow X$ est une solution (classique) du problème (2-1) sur $[0, T[$ si u est continue sur $[0, T[$, continûment différentiable sur $]0, T[$. $u(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et (2-1) est satisfait sur $[0, T[$.

Soit $T(t)$ le C_0 semi-groupe généré par A et soit u la solution de (2-1). Alors la fonction $g(s) = T(t-s)u(s)$, qui est à valeurs dans X, est différentiable pour $0 < s < t$ et

$$\frac{dg}{ds} = -A\,T(t-s)u(s) + T(t-s)\,u'(s)$$

$$= -A\,T(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s)$$

$$= T(t-s)f(s) \qquad (2-2)$$

Si $f \in L^1(0,T;X)$ alors $T(t-s)f(s)$ est intégrable et si on intègre (2-2) de 0 à t on aura :

$$U(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \qquad (2-3)$$

Par conséquent on a :

<u>Corollaire II-1 :</u>

Si $f \in L^1(0,T;X)$ alors pour tout $x \in X$ le problème de Cauchy (2-1) non homogène admet au plus une solution. S'il admet une solution elle est donnée par (2-3).

Pour tout $f \in L^1(0,T;X)$ le second membre de (2-3) est une fonction continue sur $[0,T]$. il est naturel de la considérer comme une solution généralisée du prob (2-1) même elle n'est pas différentiable et ne satisfait pas l'équation au sens strict de la déf II-1

Alors on peut donner la définition suivante :

Définition II-2 :

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$. Soit $x \in X$ et $f \in L^1(0,T;X)$. La fonction $u \in C([0,T];X)$ donnée par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \quad 0 \leq t \leq T$$

est appelée solution généralisée du problème de Cauchy (2-1) sur $[0,T]$

La définition de la solution généralisée du problème non homogène (2-1) coïncide avec la définition $T(t)x$, lorsque $f=0$, de la solution généralisée du problème homogène correspondant. Donc il est clair que toute solution généralisée peut ne pas être solution (classique) même si $f \equiv 0$.

Pour $f \in L^1(0,T;X)$ le problème de Cauchy non homogène (2-1) admet, d'après la définition II-2 une unique solution généralisée. Dans ce qui suit on va imposer plus de conditions sur $f(t)$ et prendre $x \in D(A)$ et on arrive à montrer que la solution généralisée deviendra alors la solution classique du problème non homogène (2-1).

<u>Remarque II-1</u>

On peut facilement voir que la continuité de f n'est pas, en général, suffisante pour assurer l'existence de la solution de (2-1) pour $x \in D(A)$. En effet soit A le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe $T(t)$ et soit $x \in X$ tq $T(t)x \notin D(A)$, $\forall t \geq 0$. Soit $f(s) = T(s)x$ alors $f(s)$ est continue pour $s \geq 0$, considérons le problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + T(t)x \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad (2-4)$$

on peut voir facilement que le problème (2-4) n'a pas de solution même que $u(0) = 0 \in D(A)$. En effet, la solution généralisée de (2-4) est

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)x\,ds = tT(t)x$$

mais $tT(t)x$ ne peut être différentiable pour $t > 0$ et par suite ne peut être la solution de (2-4).

Pour pouvoir démontrer l'existence de la solution du problème de Cauchy (2-1) on doit imposer à f d'autres conditions plus que la continuité.

Théorème II-4 :

Soit A le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe $T(t)$. Soit $f \in L^1(0,T;X)$ une fonction continue sur $]0,T]$ et soit

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds \quad 0 \leq t \leq T \quad (2\text{-}5)$$

Le problème de Cauchy non homogène (2-1) admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$ si l'une des deux conditions est satisfaite :

(i) $v(t)$ est continûment différentiable sur $]0,T[$.

(ii) $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t)$ est continue sur $]0,T[$.

Si (2-1) admet une solution u sur $[0,T[$ pour un $x \in D(A)$ alors v satisfait les deux conditions (i) et (ii) en même temps.

Preuve :

Si le problème de Cauchy (2-1) admet une solution u pour $x \in D(A)$ alors cette solution est donnée par (2-3) et par conséquent $v(t) = u(t) - T(t)x$ est différentiable pour $t > 0$ comme somme de deux fonctions différentiables et on a

$v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$ qui est aussi une fonction continue sur $]0, T[$ et donc (i) est satisfaite. De même si $x \in D(A)$

$T(t)x \in D(A)$ pour $t \geq 0$ et donc

$v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A)$ pour $t > 0$

et $Av(t) = Au(t) - AT(t)x$
$= u'(t) - f(t) - T(t)Ax$

qui est une fonction continue sur $]0, T[$

et donc (ii) est aussi satisfaite.

D'autre part il est facile de vérifier que pour $h>0$

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t)=\frac{v(t+h)-v(t)}{h}-\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,ds \qquad (2-6)$$

De la continuité de f il est clair que le second terme du second membre de (2-6) tend vers $f(t)$ lorsque $h\to 0$.

Donc si $v(t)$ est continûment différentiable sur $]0,T[$ alors de (2-6) il s'ensuit que

$v(t)\in D(A)$ pour $0<t<T$ et $Av(t)=v'(t)-f(t)$

Puisque $v(0)=0$ alors $u(t)=T(t)x+v(t)$ est la solution du problème de Cauchy (2-1) pour $x\in D(A)$. Si $v(t)\in D(A)$ de la relation (2-6) on peut déduire que $v(t)$ est dérivable à droite en t et que la dérivation à droite $D^+v(t)$ de v satisfait la relation suivante :

$D^+v(t) = Av(t) + f(t)$ donc $D^+v(t)$ serait une fonction continue alors $v(t)$ est continûment différentiable et $v'(t) = Av(t) + f(t)$ et puisque aussi $v(0) = 0$ alors on en déduit que $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution du problème de Cauchy (2-1) pour $x \in D(A)$, ce qui termine la démonstration.

Corollaire II-2 :

Soit A le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe $T(t)$. Si $f(s)$ est continûment différentiable sur $[0,T]$ alors le problème de Cauchy (2-1) admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$.

Preuve :

On a

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\,ds = \int_0^t T(s) f(t-s)\,ds \qquad (2-7)$$

Il est claire de (2-7) que $v(t)$ est différentiable pour $t>0$ et que sa dérivée est donnée par:

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)\,ds$$

$$= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds$$

donc $v'(t)$ est continue sur $]0,T[$ et le résultat se déduit du théorème précédent ie Théorème II-4 (ii)

Corollaire II-3 :

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$. Soit $f \in L^1(0,T,X)$ une fonction continue sur $]0,T[$. Si $f(s) \in D(A)$ pour $0<s<T$ et $Af(s) \in L^1(0,T,X)$ alors pour tout $x \in D(A)$ le problème de Cauchy (2-1) admet une solution sur $[0,T[$

Preuve :

Des hypothèses on a pour $s > 0$

$T(t-s) f(s) \in D(A)$ et que

$A T(t-s) f(s) = T(t-s) A f(s)$ est intégrable

Donc pour $v(t)$, définie par (2-5), satisfait à $v(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et

$$A v(t) = A \int_0^t T(t-s) f(s) ds = \int_0^t T(t-s) A f(s) ds$$

est continue et donc le résultat du corollaire se déduit directement du théorème II-4 (ii).

Théorème II-5 :

Soit $f \in L^1(0,T;X)$ si u est la solution généralisée de (2-1) sur $[0,T]$ alors pour tout $T' < T$, u est limite uniforme sur $[0,T']$ des solutions de (2-1).

Preuve :

Supposons que $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$. Soit $x_n \in D(A)$ tq $x_n \to x$ et soit aussi $f_n \in C^1([0,T], X)$ tq $f_n \to f$ dans $L^1(0,T; X)$ alors du corollaire II-2 on peut déduire facilement que pour tout $n \geq 1$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = A u_n(t) + f_n(t) \\ u_n(0) = x_n \end{cases} \qquad (2-8)$$

admet une solution $u_n(t)$ sur $[0,T[$. qui satisfait

$$u_n(t) = T(t) x_n + \int_0^t T(t-s) f_n(s)\, ds$$

Si u est la solution généralisée de (2-1) sur $[0,T]$ alors

$$\|u_n(t) - u(t)\| \leq M e^{wt} \|x_n - x\| + \int_0^t M e^{w(t-s)} \|f_n(s) - f(s)\| ds$$

$$\leq M e^{wT} \left(\|x_n - x\| + \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\| ds \right) \qquad (2-9)$$

Alors le resultat s'ensuit directement de la relation (2-9).

Donnons maintenant une autre notion de la solution du problème de Cauchy (2-1) qui est la notion de la solution forte.

Définition II-3 :

Une fonction u qui est presque partout différentiable sur $[0,T]$ tq $u' \in L^1(0,T;X)$ est appelée solution forte du problème de Cauchy (2-1) si $u(0) = x$ et

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \quad p.p \text{ sur } [0,T]$$

Notons que si $A = 0$ et $f \in L^1(0,T;X)$ le problème de Cauchy (2-1) n'admet pas en général une solution à moins que f soit continue. Cependant il admet toujours une solution forte donnée par

$$u(t) = u(0) + \int_0^t f(s)\,ds .$$

Il est facile de voir que si u est solution forte de (2-1) et $f \in C^1(0,T;X)$ alors u sera donnée par la relation (2-3) et donc c'est la solution généralisée et par suite c'est l'unique solution forte du problème de Cauchy (2-1).
La question la plus naturelle qu'on doit se poser c'est pour quelle conditions la solution généralisée sera-t-elle solution forte du problème de Cauchy (2-1). Il n'est pas difficile de voir qu'essentiellement la démonstration du théorème suivant ne diffère pas de celle donnée pour le théorème II-4.

Théorème II-6 :

Soit A le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe $T(t)$. Soit $f \in L^1(0,T,X)$ et soit :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds \qquad 0 \leq t \leq T$$

Le problème de Cauchy (2-1) admet une solution forte u sur $[0,T]$ pour tout $x \in D(A)$ si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(i) $v(t)$ est différentiable pp sur $[0,T]$ et $v'(t) \in L^1(0,T;X)$

(ii) $v(t) \in D(A)$ pp sur $[0,T]$ et $Av(t) \in L^1(0,T;X)$

Si le problème de Cauchy (2-1) admet une solution forte u sur $[0,T]$ pour un $x \in D(A)$ alors v satisfait (i) et (ii).

Comme conséquence du théorème II-6 on a :

Corollaire II-4 :

Soit A le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe $T(t)$. Si f est différentiable p p sur $[0,T]$ et $f' \in L^1(0,T;X)$ alors pour tout $x \in D(A)$ le problème de Cauchy (2-1) admet une unique solution forte sur $[0,T]$.

En général si f est lipschitzienne sur $[0,T]$ 'est pas suffisant pour assurer l'existence de la solution forte. cependant, si X est réflexif et f lipschitzienne sur $[0,T]$ i.e

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq C|t_1 - t_2| \quad , \forall t_1, t_2 \in [0,T]$$

alors on peut montrer que f est différentiable presque partout et que $f' \in L^1(0,T;X)$.

Donc du corollaire II-4 on déduit :

<u>corollaire II-5 :</u>

Soit X un espace de Banach réflexif et soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$. Si f est lipschitzienne sur $[0,T]$ alors pour tout $x \in D(A)$ le problème de Cauchy (2-1) admet une unique solution u sur $[0,T]$ donnée par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds$$

<u>Preuve :</u>

D'après les remarques précédentes le problème de Cauchy (2-1) admet une solution forte et donc d'après le théorème II-6, $u(t)$, donnée par la relation (2-5), est presque partout dérivable et on a :

$$v'(t) = T(t) f(0) + \int_0^t T(t-s) f'(s) ds$$
$$= g(t)$$

Il est facile de vérifier que $g(t)$ est une fonction continue et donc le résultat se déduit directement du théorème II-4.