

UV Automatique

Cours 2

Réponse temporelle des systèmes dynamiques continus LTI

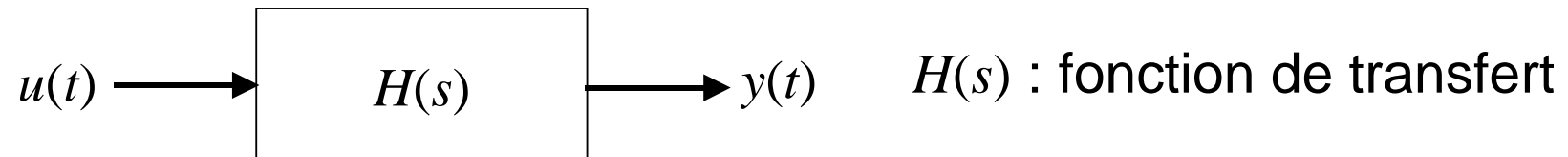
ASI 3

Contenu

- Introduction
- Etude des systèmes du premier ordre
 - ◆ Intégrateur
 - ◆ Système du 1^{er} ordre
- Etude des systèmes du 2^{ème} ordre
 - ◆ Système du 2^{ème} ordre avec réponse apériodique
 - ◆ Système du 2^{ème} ordre avec réponse oscillatoire
- Systèmes d'ordre supérieur à 2 et autre système
 - ◆ Notion de pôles dominants
 - ◆ Système avec retard

Introduction

□ Système continu LTI



Quelle est la forme de la sortie $y(t)$ du modèle en réponse aux signaux usuels :

- impulsion de Dirac $u(t)=\delta(t)$
- signal échelon $u(t)=\Gamma(t)$
- signal rampe $u(t)=v(t)$

□ Décomposition en éléments simples

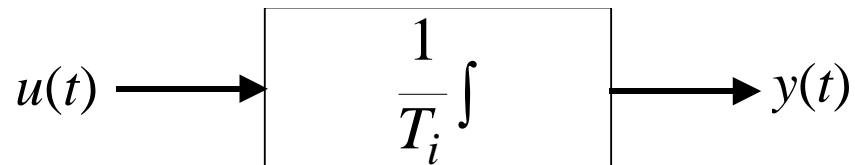
$$H(s) = \sum_i H_i(s)$$

$H_i(s)$: fonction de transfert de systèmes de base ou systèmes fondamentaux (1^{er} ordre, 2^e ordre)

Intégrateur (1)

- Système régi par l'équation différentielle

$$T_i \dot{y}(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (\text{CI nulle})$$

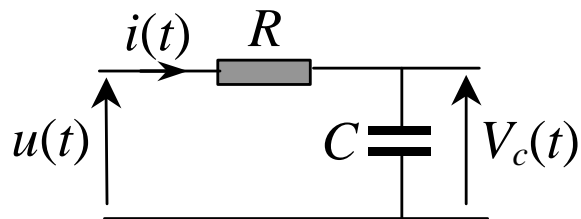


- Fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1}{T_i s} \quad T_i : \text{constante d'intégration}$$

Pôle : $\lambda=0$

- Exemple



Relation entre le courant $i(t)$ et $V_c(t)$

$$y(t) = V_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Intégrateur (2)

□ Réponse aux signaux usuels

◆ Réponse impulsionnelle

$$u(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) = \frac{\Gamma(t)}{T_i}$$

La réponse impulsionnelle d'un intégrateur est un échelon d'amplitude $1/T_i$

◆ Réponse indicielle

$$u(t) = \Gamma(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{T_i} v(t)$$

La réponse indicielle d'un intégrateur est une rampe de pente $1/T_i$

◆ Réponse à une rampe

$$u(t) = v(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = ?$$

Systeme du 1^{er} ordre (1)

- Systeme régi par l'équation différentielle

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$

- Fonction de transfert

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \Rightarrow sTY(s) + Y(s) = KU(s)$$

$$H(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

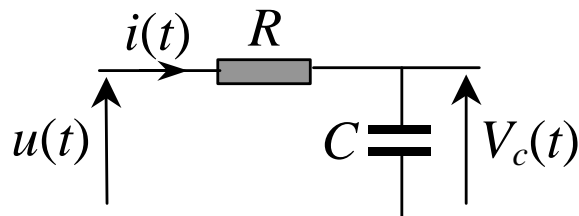
T : constante de temps

K : gain statique

Pôle : $\lambda = -\frac{1}{T}$

Condition de stabilité : $T > 0$

- Exemple



$$RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \text{ avec } y(t) = V_c(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + Ts} \text{ avec } T = RC$$

Systeme du 1^{er} ordre (2)

□ Réponse impulsionnelle

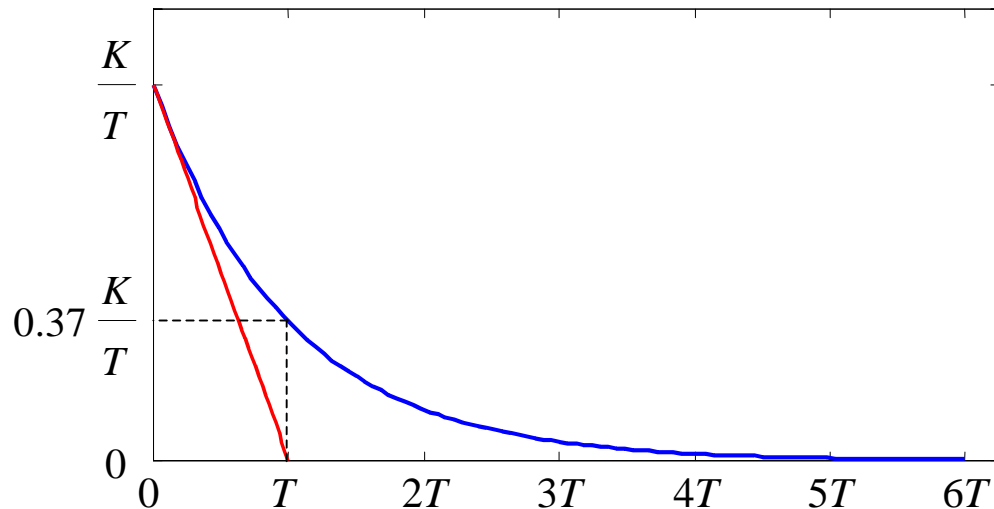
◆ Entrée : $u(t) = \delta(t)$

◆ Réponse du système : $h(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

◆ Tangente à l'origine : $x(t) = -\frac{K}{T^2}t + \frac{K}{T}$ (Pente = $-\frac{K}{T^2}$)

La tangente à l'origine coupe l'axe des temps en $t = T$

Réponse impulsionnelle



0	T	2T	3T
$h_0 = \frac{K}{T}$	0.37 h_0	0.13 h_0	0.05 h_0

Systeme du 1^{er} ordre (3)

□ Réponse indicielle

◆ Entrée : signal échelon $u(t) = \Gamma(t)$

◆ Réponse du système

$$u(t) = \Gamma(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} . \text{ On en déduit } Y(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}$$

$$y(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = K \left(1 - e^{\lambda t} \right)$$

◆ Valeur de la sortie en régime permanent

$$y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$$

◆ Tangente à l'origine

$$x(t) = \frac{K}{T} t \quad \left(\text{Pente} = \frac{K}{T} \right)$$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale $y = K$ en $t = T$

Systeme du 1^{er} ordre (4)

□ Réponse indicielle (fin)

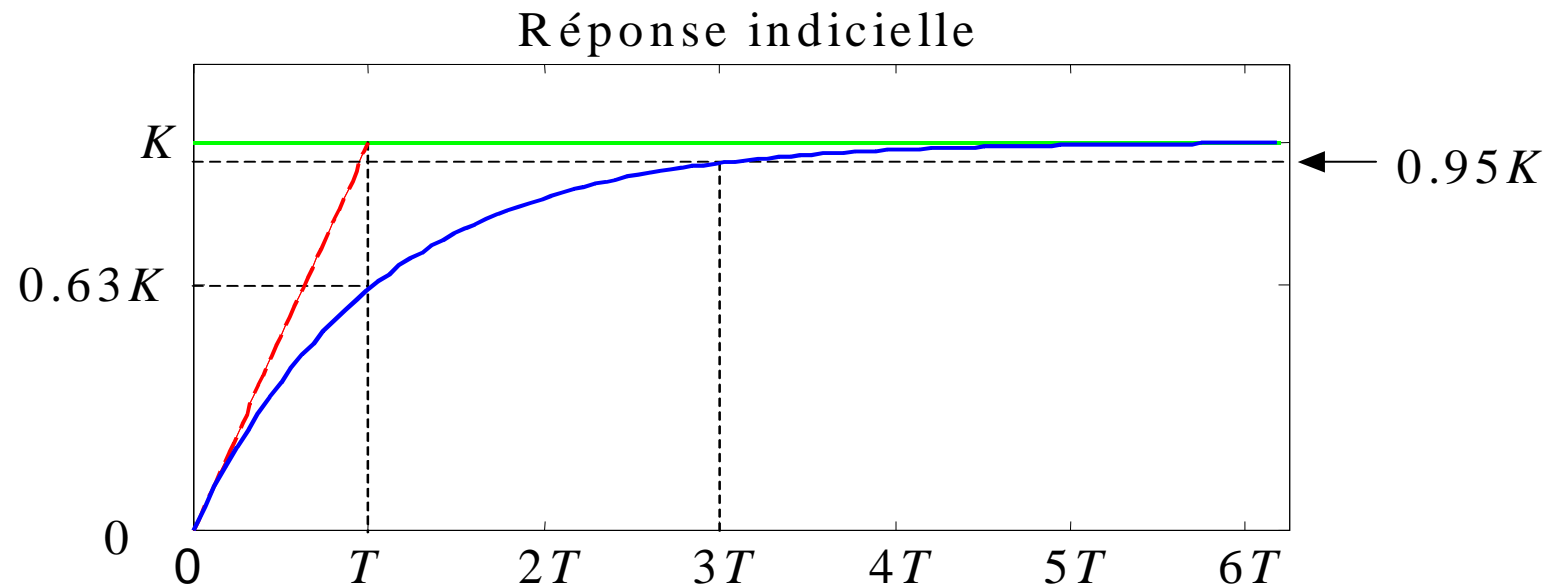


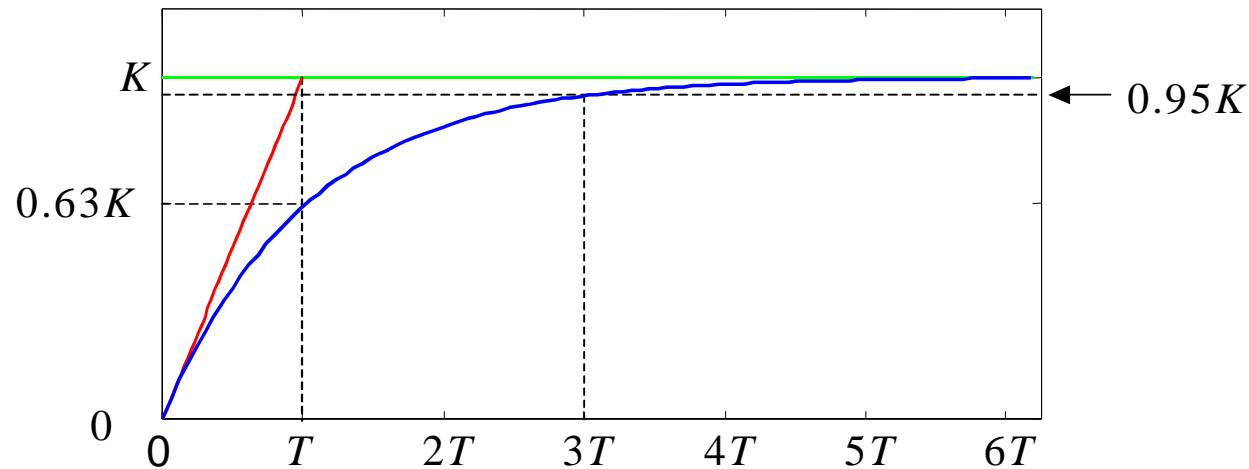
Tableau récapitulatif de l'évolution de la sortie

t	T	$2T$	$3T$	$5T$	∞
$\frac{y(t)}{y_\infty}$ (%)	63%	87%	95%	99,4%	100%

y_∞ : valeur de la sortie en régime permanent

Systeme du 1^{er} ordre (5)

□ Rapidité du systeme



◆ Temps de réponse t_r du systeme

t_r = temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $0.95y_\infty$

$$t_r \approx 3T$$

◆ Temps de montée t_m

t_m = temps au bout duquel la réponse passe de $0.1y_\infty$ à $0.9y_\infty$

$$t_m \approx 2,2T$$

Systeme du 1^{er} ordre (6)

□ Réponse à une rampe

◆ Entrée : signal rampe $u(t) = v(t)$

◆ Réponse du système

$$u(t) = v(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}. \text{ On en déduit } Y(s) = \frac{K}{s^2(1+Ts)}$$

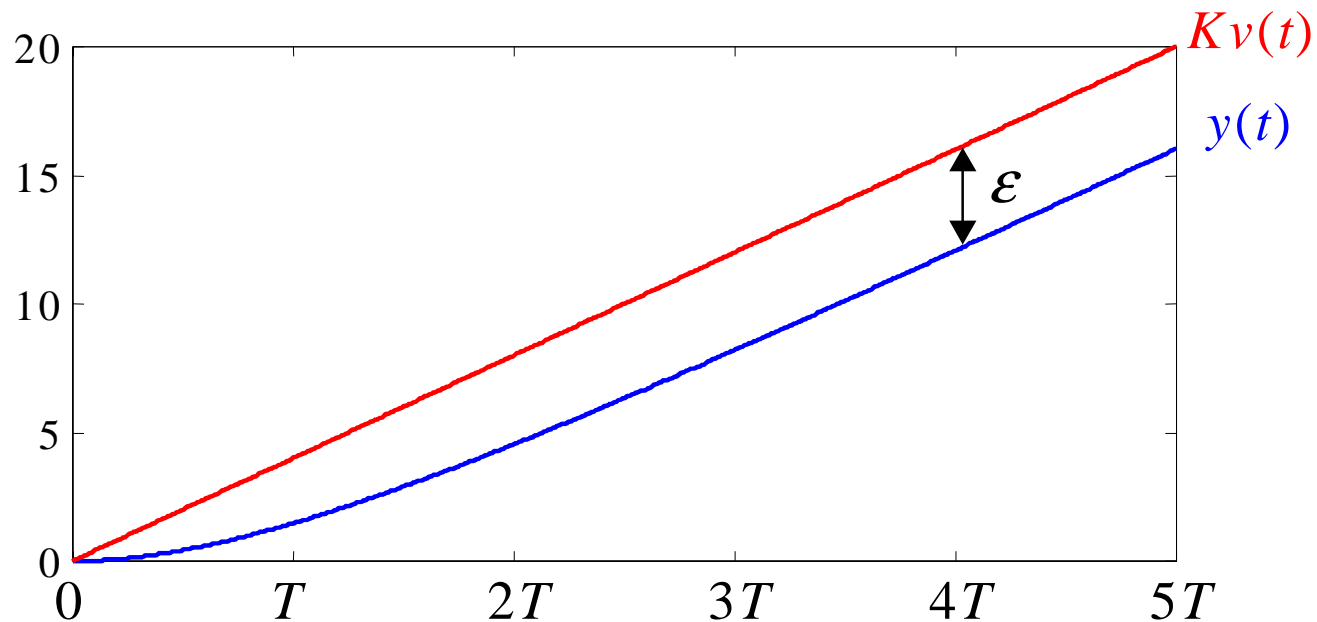
$$y(t) = K(t-T) + KTe^{-\frac{t}{T}}$$

◆ Remarques

- La réponse est la somme de deux termes : une fonction exponentielle décroissante et une rampe retardée, de retard T
- Le terme $KTe^{-\frac{t}{T}} \approx 0$ au bout de $3T \Rightarrow$ la sortie tend asymptotiquement vers $K(t-T)$
- La pente à l'origine est nulle

Systeme du 1^{er} ordre (7)

□ Réponse à une rampe (fin)



- La sortie suit asymptotiquement la rampe $Kv(t)$ avec un retard T
- L'écart en régime permanent $\varepsilon = Kv(t) - y(t)$ est appelé **erreur de traînage**

$$\text{Erreur de traînage : } \varepsilon = KT$$

Systeme du 2^e ordre (1)

- Systeme régi par l'équation différentielle

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

- Fonction de transfert

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \Rightarrow (a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 U(s)$$

$$H(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

- Autre écriture de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}$$

ou

$$H(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

ξ : facteur d'amortissement, K : gain

Automatique ω_n : pulsation naturelle non amortie du système avec $\omega_n > 0$

Systeme du 2^e ordre (2)

□ Pôles du système

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Les pôles sont les racines du polynôme $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$

◆ Etude du discriminant réduit

➤ $\Delta = \omega_n^2(\xi^2 - 1)$

➤ Si $|\xi| \geq 1$ alors $\Delta \geq 0$: le système a des pôles réels et son comportement est **apériodique**

▪ Si $|\xi| > 1$ alors le système a **deux pôles réels distincts**

▪ Si $|\xi| = 1$ alors le système a un **pôle réel double**

➤ Si $|\xi| < 1$ alors $\Delta < 0$: le système a une **paire de pôles complexes conjugués** et son comportement est **oscillatoire**

Systeme du 2^e ordre (3)

□ Systeme aperiologique : $|\xi| \geq 1$

◆ Poles du systeme

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

◆ Condition de stabilite

Le systeme est **stable** si les poles λ_1 et λ_2 sont negatifs, ce qui correspond a la condition $\xi \geq 1$

◆ Factorisation de la fonction de transfert

Comme $\lambda_1 \lambda_2 = \omega_n^2$, on a $H(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$

Le systeme du 2^e ordre aperiologique est equivalent a la mise en serie de deux systemes du 1^{er} ordre de constantes de temps :

$$T_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$$

Systeme du 2^e ordre (4)

□ Systeme aperiodique (cas $\xi > 1$) : reponse indicielle

◆ Decomposition de la FT en elements simples

$$H(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \Rightarrow H(s) = \frac{K_1}{(1+T_1s)} - \frac{K_2}{(1+T_2s)}$$

$$\text{avec } K_1 = \frac{KT_1}{T_1 - T_2} \text{ et } K_2 = \frac{KT_2}{T_1 - T_2}$$

◆ Reponse indicielle

C'est la somme des reponses indiciaires des deux sous-systemes

$$y(t) = K_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) - K_2 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) = K_1 (1 - e^{\lambda_1 t}) - K_2 (1 - e^{\lambda_2 t})$$

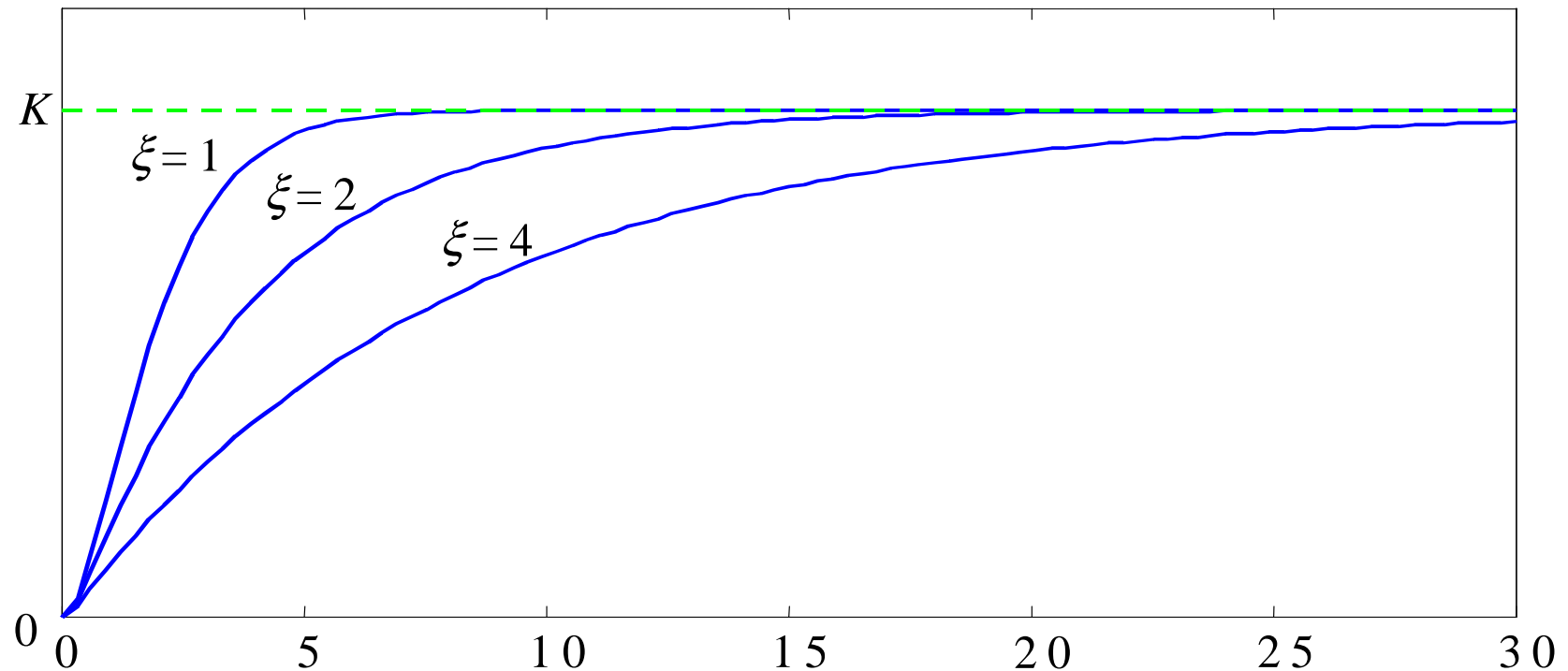
□ Systeme aperiodique (cas $\xi = 1$) : reponse indicielle

$$H(s) = ?$$

$$y(t) = ?$$

Systeme du 2^e ordre (5)

□ Systeme aperiodique ($\xi \geq 1$) : reponse indicielle



◆ Remarques

- Pente à l'origine nulle
- La réponse la plus rapide correspond à $\xi=1$
- Asymptote horizontale $y=K$

Systeme du 2^e ordre (6)

□ Systeme oscillatoire : $|\xi| < 1$

◆ Poles du systeme

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Le systeme est stable si $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ et $\text{Re}(\lambda_2) < 0$, soit $0 < \xi < 1$

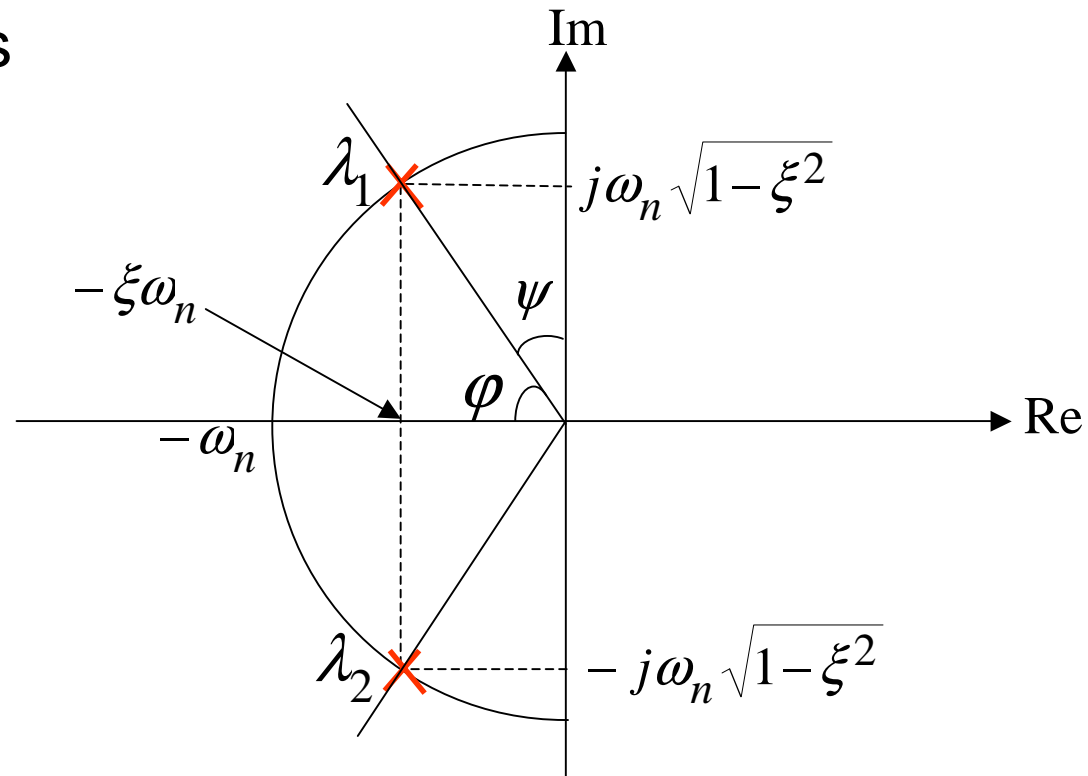
◆ Lieu des poles

Pour $0 \leq \xi \leq 1$

Rayon de l'arc
de cercle = ω_n

$$\cos(\varphi) = \xi$$

$$\sin(\psi) = \xi$$



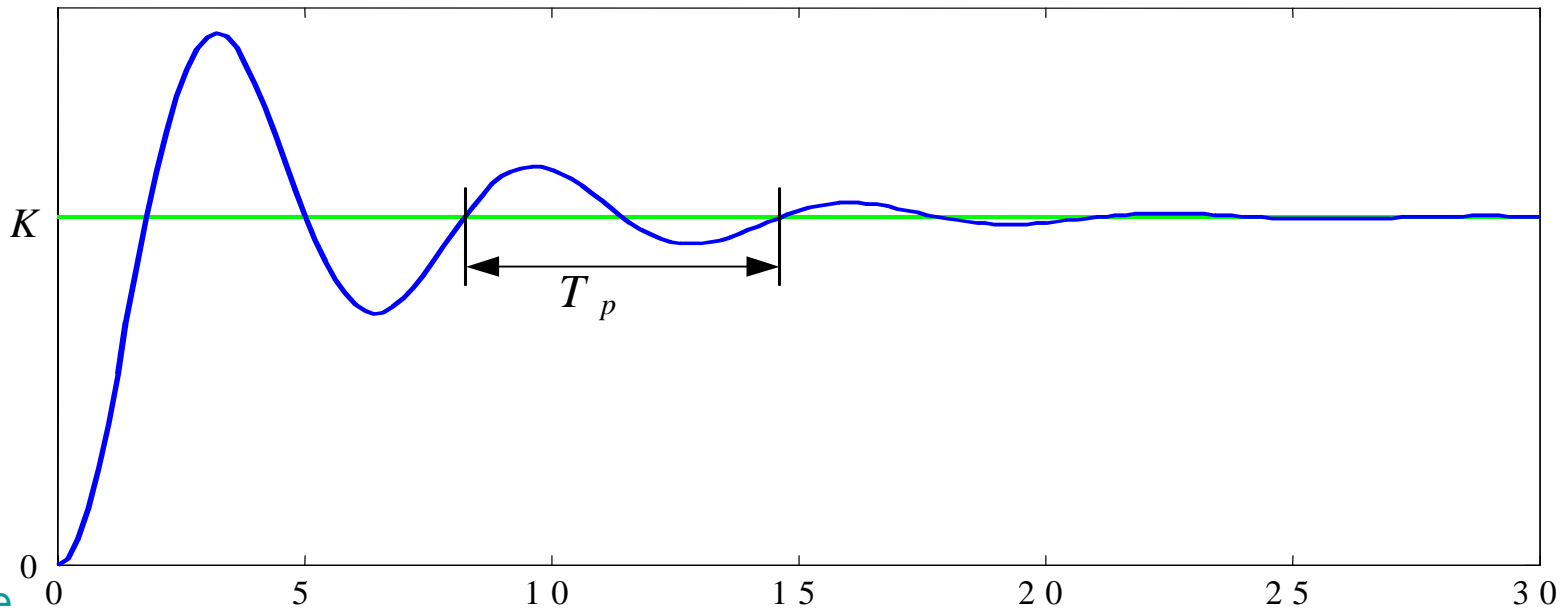
Systeme du 2^e ordre (7)

□ Systeme oscillatoire ($0 < \xi < 1$)

◆ Réponse indicielle

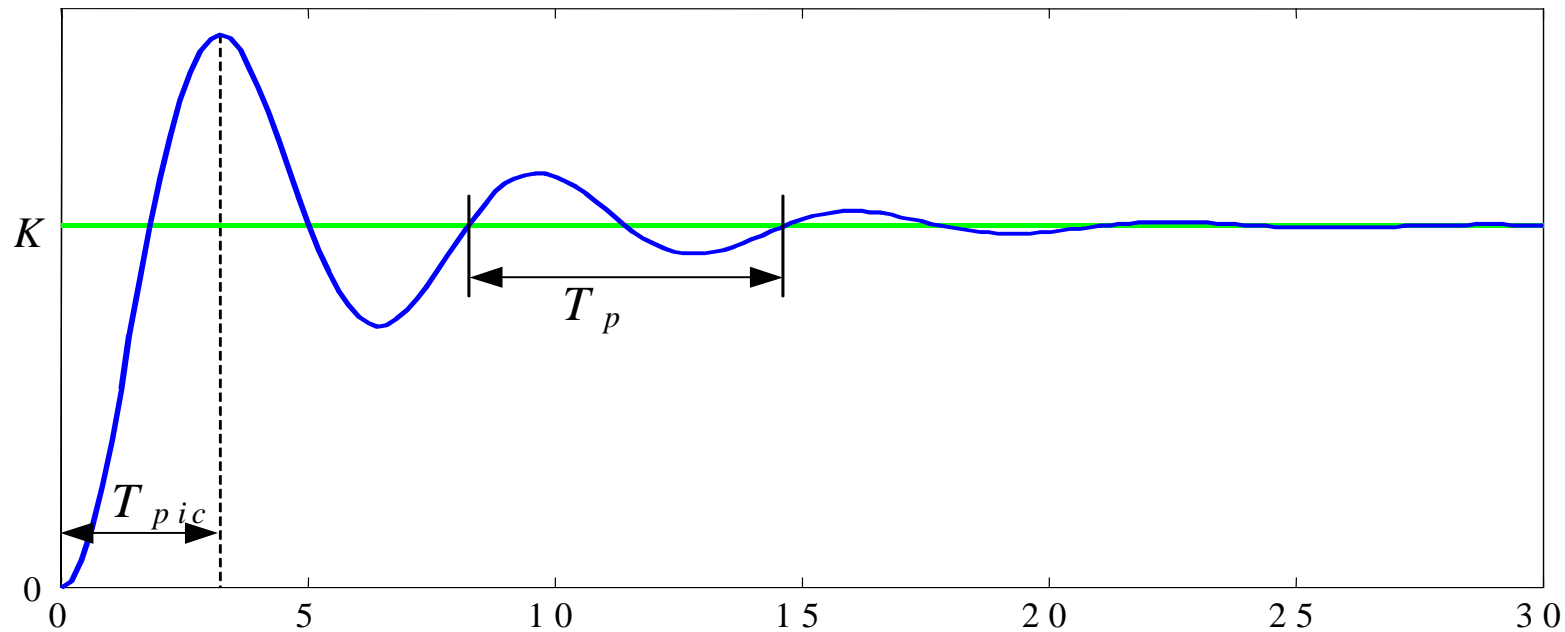
$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_p t + \varphi) \right)$$

avec $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right) = \arccos \xi$



Systeme du 2^e ordre (8)

□ Systeme oscillatoire ($0 < \xi < 1$) : reponse indicielle

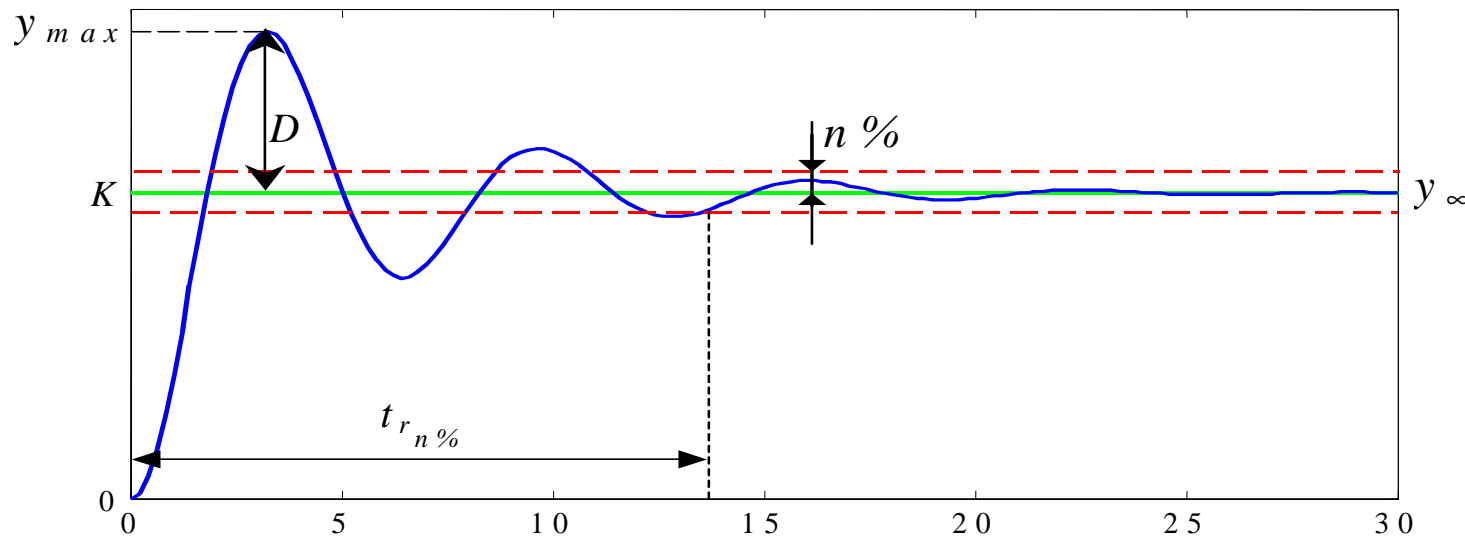


□ Caracteristiques de la reponse indicielle

- Réponse oscillatoire amortie de pulsation $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$
- Pseudo-période des oscillations $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$
- Temps de pic $T_{pic} = \frac{\pi}{\omega_p}$

Systeme du 2^e ordre (9)

□ Systeme oscillatoire : caracteristiques de la reponse indicielle



➤ Dépassement (D)

Définition : $D_{\%} = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \times 100$

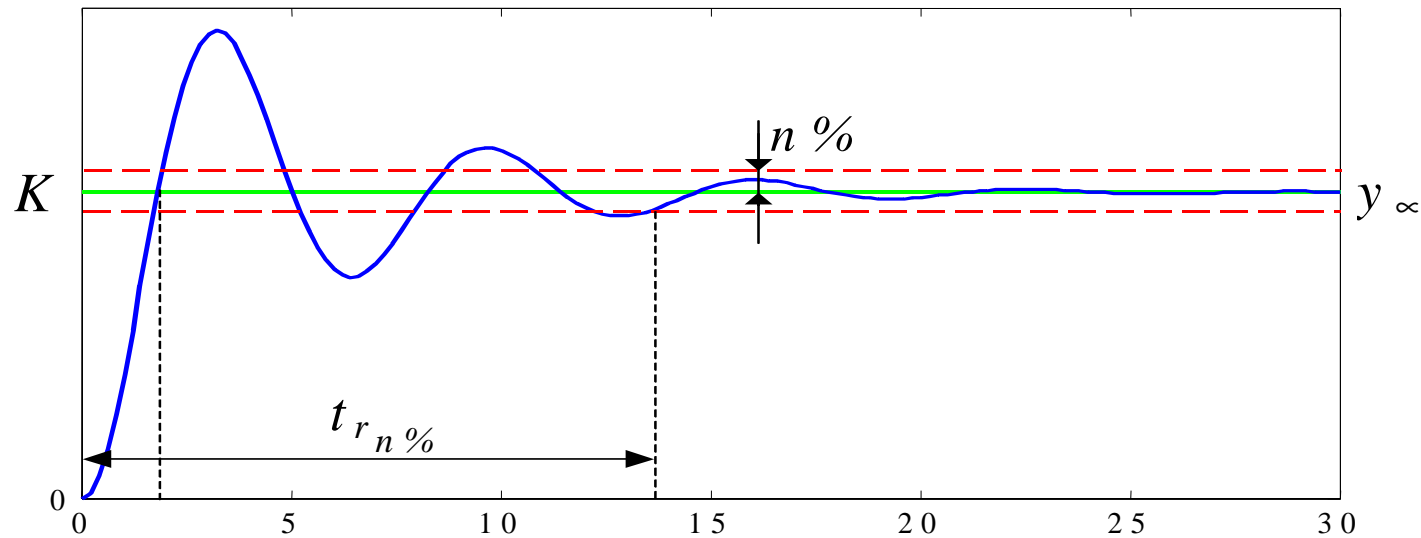
y_{∞} : valeur de la sortie en régime permanent

y_{\max} : valeur de pic de la réponse indicielle

D est lié au coefficient d'amortissement ξ par : $D_{\%} = 100 e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Systeme du 2^e ordre (10)

□ Systeme oscillatoire : caracteristiques de la reponse indicielle



➤ Temps de reponse à n% ($t_{r_{n\%}}$)

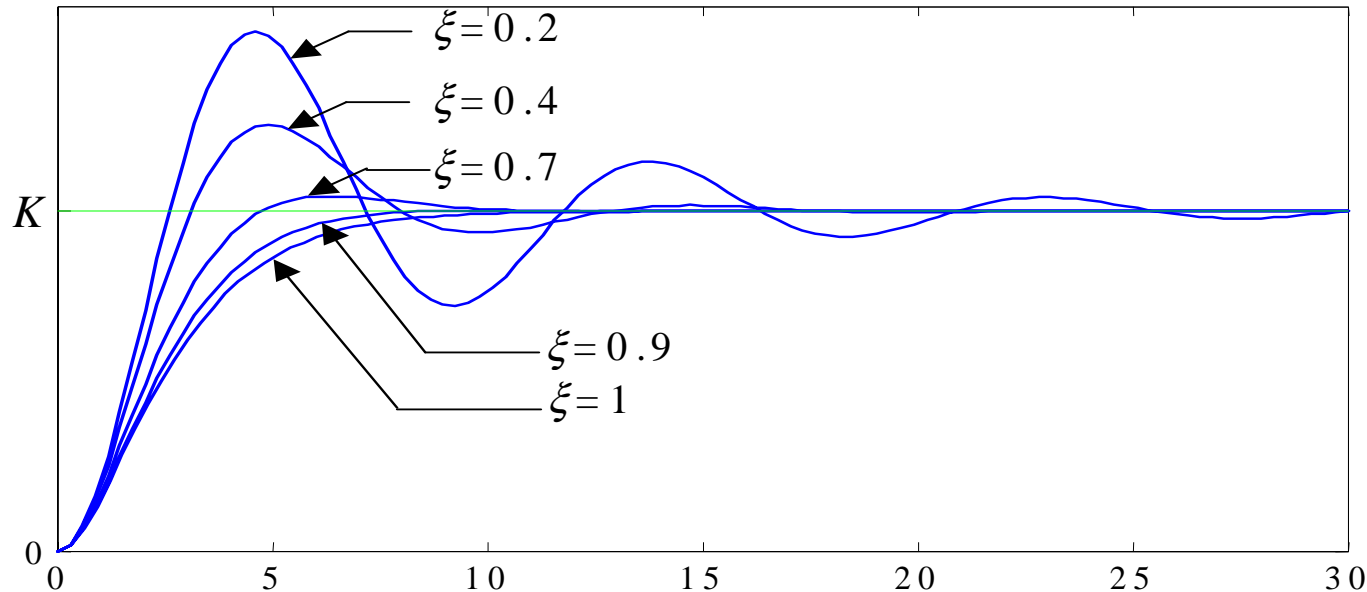
C'est le temps au bout duquel la reponse indicielle atteint $\pm n\%$ de sa valeur finale

$$t_{r_{n\%}} \approx \frac{1}{\xi \omega_n} \ln \frac{100}{n} \quad (\xi < 0.7)$$

On mesure en general le temps de reponse à 5% : $t_{r_{5\%}} \approx \frac{3}{\xi \omega_n} \quad (\xi < 0.7)$

Systeme du 2^e ordre (11)

□ Influence du coefficient d'amortissement

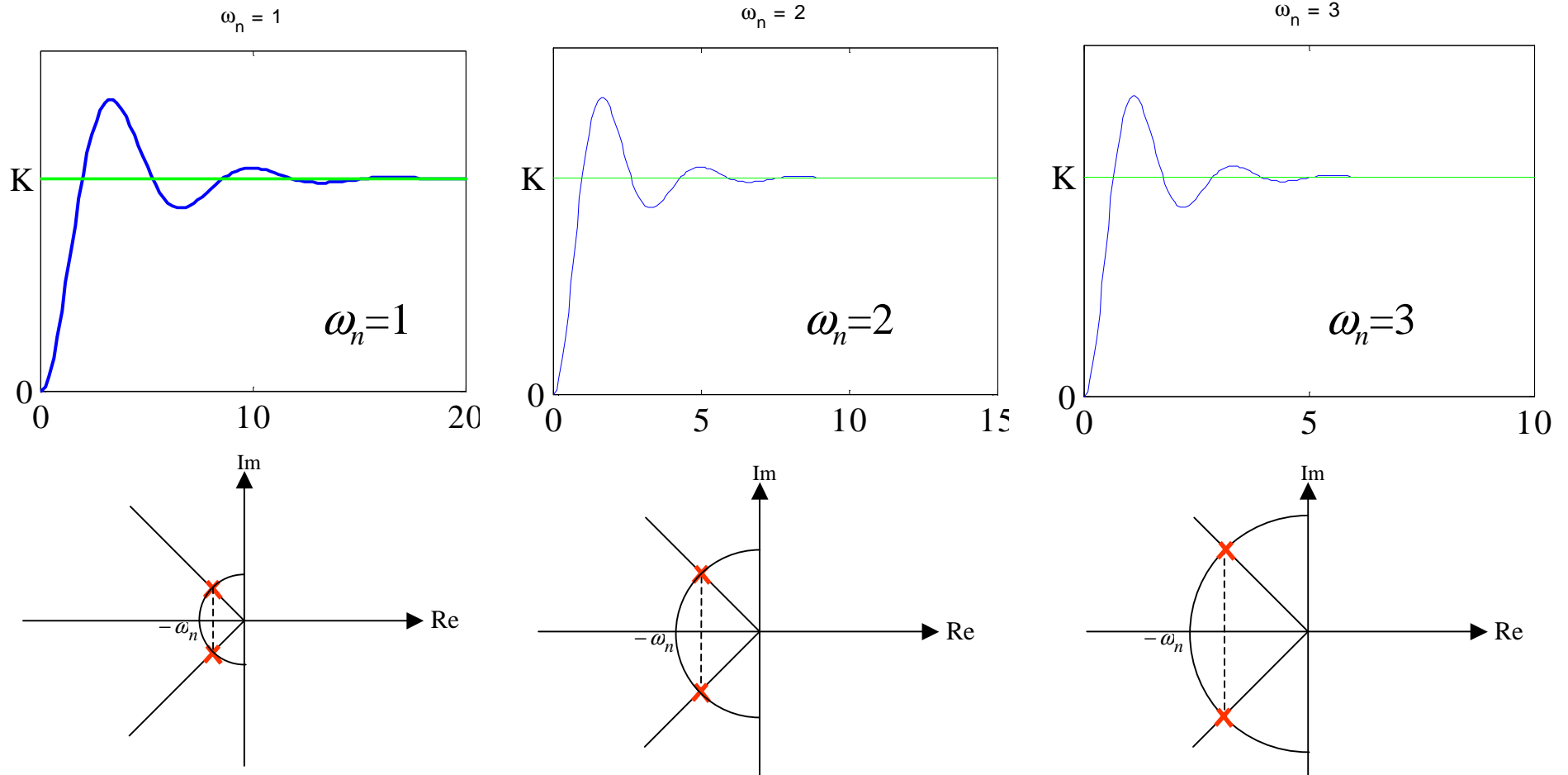


- Amortissement faible ($\xi < 0.7$) : réponse peu amortie, fortes oscillations, fort dépassement, réponse d'autant plus rapide que ξ est faible
- Amortissement fort ($\xi > 0.7$) : réponse très amortie, pas d'oscillations, dépassement à peine visible
- Amortissement $\xi = 0.7$ (souvent utilisé)

Automatique ■ Dépassement $D \approx 5\%$ et $t_{r_{5\%}} \approx 3$

Systeme du 2^e ordre (12)

□ Influence de la pulsation naturelle ω_n



- Plus la pulsation ω_n est faible, plus la période des oscillations est grande
- Plus la pulsation ω_n est faible, plus la réponse du système est lente

Systeme d'ordre superieur à 2 (1)

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad \text{avec } m < n \text{ et } n > 2$$

Factorisation de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{K \prod_k (1 + T_k s)^{\gamma_k} \prod_l (s^2 + 2\xi_l \omega_{n,l} s + \omega_{n,l}^2)^{\gamma_l}}{s^\alpha \prod_i (1 + T_i s)^{\beta_i} \prod_j (s^2 + 2\xi_j \omega_{n,j} s + \omega_{n,j}^2)^{\beta_j}}$$

On peut factoriser la fonction de transfert sous la forme d'éléments de base du premier ou du second ordre

Décomposition en éléments simples

$$H(s) = \sum_i H_i(s) \quad H_i(s) : \text{fonction de transfert de systèmes du 1}^{\text{er}} \text{ ordre ou du 2}^{\text{e}} \text{ ordre}$$

$$y(t) = \sum_i y_i(t) \quad \text{avec } y_i(t) \text{ la réponse au signal d'entrée du système de fonction de transfert } H_i(s)$$

Systeme d'ordre superieur à 2 (2)

□ Exemple

Trouver la réponse indicielle du système suivant :

$$H(s) = \frac{1+3s}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}$$

$$H(s) = \frac{1+3s}{(s+1)(s+3)(s+5)} \Rightarrow \text{Pôles : } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -5,$$

$$H(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+5)} \quad \text{avec } A = \frac{1}{4}, B = 1, C = -\frac{5}{4}$$

Réponse indicielle

$$Y(s) = U(s)H(s) = \frac{1}{s}H(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{A}{s(s+1)} + \frac{B}{s(s+3)} + \frac{C}{s(s+5)}$$

$$\Rightarrow y(t) = A(1 - e^{-t}) + \frac{B}{3}(1 - e^{-3t}) + \frac{C}{5}(1 - e^{-5t})$$

Notion de pôles dominants (1)

□ Illustration

Traçons la réponse indicielle du système de fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{5}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad \text{avec } T_1=1 \text{ et } T_2=5.$$

$$\text{Les pôles sont : } \lambda_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}$$

Décomposition de la fonction de transfert : $H(s) = H_2(s) - H_1(s)$

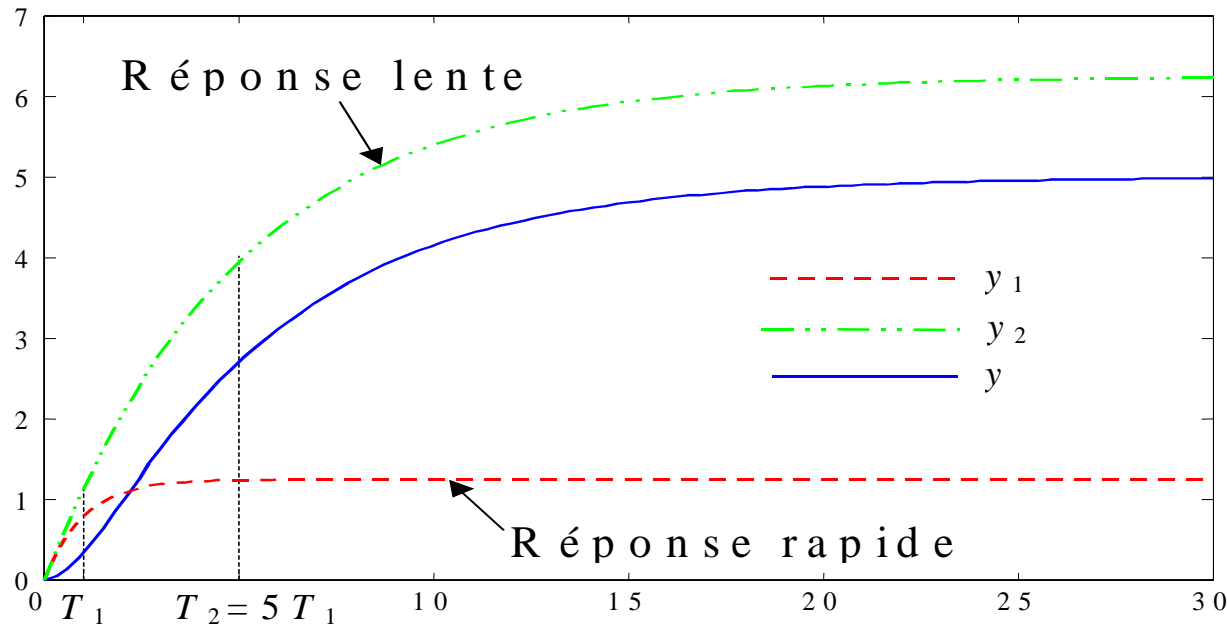
$$\text{avec } H_2(s) = \frac{25}{4} \frac{1}{(1+T_2s)} \quad \text{et} \quad H_1(s) = \frac{5}{4} \frac{1}{(1+T_1s)}$$

Réponse indicielle

$$y(t) = y_2(t) - y_1(t) = \frac{25}{4} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) - \frac{5}{4} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

$$y(t) = \frac{25}{4} \left(1 - e^{\lambda_2 t} \right) - \frac{5}{4} \left(1 - e^{\lambda_1 t} \right)$$

Notion de pôles dominants (2)



Au bout de $5T_1$, la réponse y_1 tend vers sa valeur finale $y_{1\infty}$. La sortie y du système n'évolue que sous l'influence de y_2 .

Le sous-système H_2 (son pôle est $\lambda_2 = -1/T_2$) impose le régime transitoire du système. On dit que le pôle λ_2 est **dominant** par rapport à λ_1 .

Le système du 2^e ordre a une réponse temporelle similaire à celle d'un système du 1^{er} ordre de constante de temps T_2 .

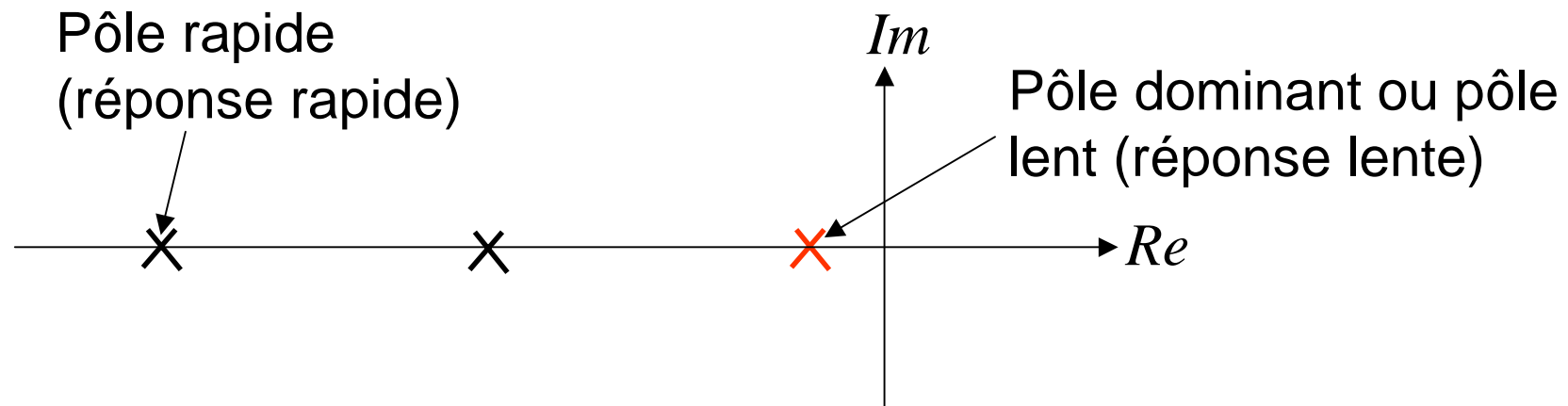
Notion de pôles dominants (3)

□ Définition

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les pôles d'un système stable. Le pôle λ_i ou la paire de pôles (λ_i, λ_i^*) est dit dominant par rapport au pôle λ_j si :

$$|\operatorname{Re}(\lambda_i)| \ll |\operatorname{Re}(\lambda_j)| \quad j \neq i$$

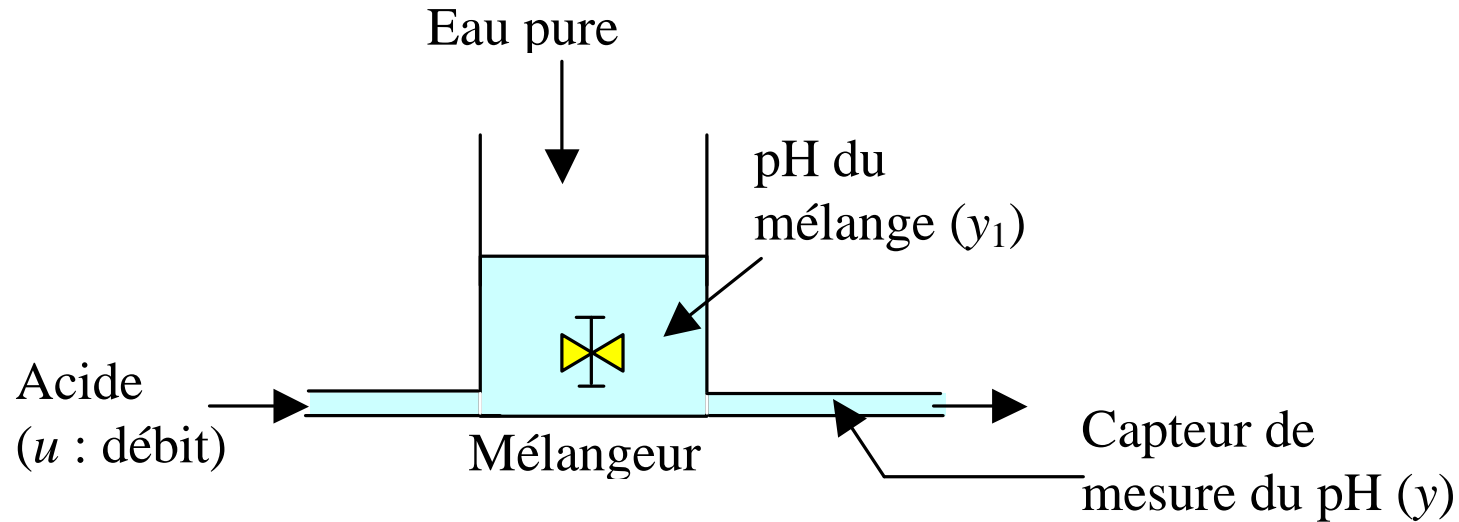
En pratique, λ_i est dominant par rapport à λ_j si $|\operatorname{Re}(\lambda_i)| < 5 \times |\operatorname{Re}(\lambda_j)|$



Les pôles dominants correspondent soit à une constante de temps élevée (réponse lente), soit à un amortissement faible (réponse très oscillatoire). Ils sont donc situés près de l'axe des imaginaires

Systeme à retard (1)

Origine du retard : exemple



Le pH mesuré y , représente le pH y_1 réalisé plus tôt : $y(t) = y_1(t - T_r)$
Le retard T_r est dû au transport du fluide de la cuve au point de mesure

$$y(t) = y_1(t - T_r)$$

⇓

$$Y(s) = e^{-T_r s} Y_1(s) \quad \Rightarrow$$

Fonction de transfert

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s)}{U(s)} \frac{Y(s)}{Y_1(s)}$$

$$H(s) = e^{-T_r s} H_1(s)$$

Systeme à retard (2)

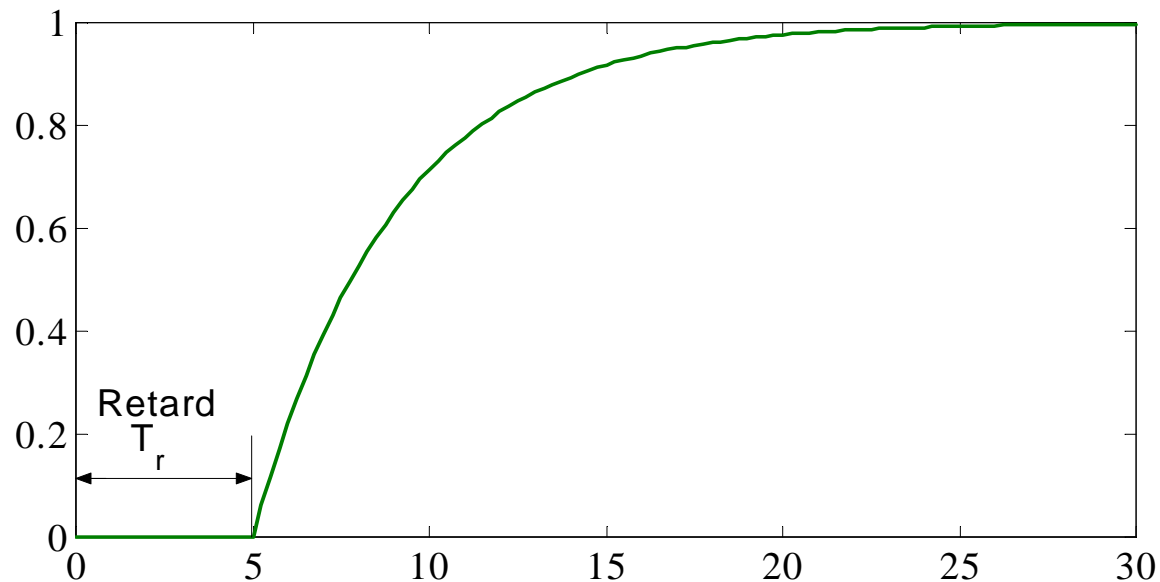
Illustration du retard

Fonction de transfert

$$H(s) = e^{-T_r s} H_1(s) \quad \text{avec} \quad H_1(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

Réponse indicielle

$$y(t) = y_1(t - T_r) = \left(1 - e^{-\frac{(t - T_r)}{T}} \right)$$



Systeme à retard (3)

□ Définition

Le retard correspond au temps qui s'écoule entre la variation de l'entrée et la répercussion de cette variation sur la sortie.

□ Retard pur

Un système réduit à un retard pur retarde l'entrée d'une durée de T_r .

$$y(t) = u(t - T_r) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = e^{-T_r s} U(s)$$

□ Approximation de $e^{-T_r s}$

◆ Si le retard T_r est très petit, on peut faire les approximations :

$$e^{-T_r s} \approx 1 - sT_r \quad \text{ou} \quad e^{-T_r s} = \frac{1}{1 + sT_r}$$

◆ Approximation simplifiée de Padé :

$$e^{-T_r s} \approx \frac{1 - T_r s / 2}{1 + T_r s / 2}$$