TD 04: Syntaxe et sémantique du calcul des prédicats (1/2)

Exercice 1

On modélise le système solaire par le modèle suivant:
Le domaine D : contient les neuf planètes et le Soleil

Les constantes C : s_0 : le Soleil, m_1 : Mercure, v : Vénus, t : la Terre, l : la Lune, m_2 Mars, j : Jupiter ; s_1 : Saturne ; u : Uranus ; n : Neptune, p : Pluton

La proximité relative par rapport au Soleil: Pluton est la plus éloignée et Mercure la plus proche

Les tailles relatives des planètes
Lune < Mercure < Mars < Pluton < Vénus < Terre < Neptune < Uranus < Saturne < Jupiter

- Px : x est une planète (du système solaire) ;
- Tx : x tourne autour de la Terre ;
- Mxy : x est plus petit (ou aussi grand) que y
- Sxy : x est plus proche (ou à égale distance) du Soleil que y

Traduire en LP_1 :

a. Vénus est une planète.
b. Le Soleil n'est pas une planète.
c. Le Soleil tourne autour de la Terre.
d. Certaines planètes sont plus petites que la Terre.
e. Toutes les planètes sont plus petites que Saturne.
f. Rien n'est plus petit que la Lune.
g. Mercure est la planète la plus proche du Soleil.
h. Mars est plus loin du Soleil que Pluton.
i. Si quelque chose est plus éloigné du Soleil que Pluton, alors ce n'est pas une planète.
j. Si le Soleil tourne autours de la Terre, alors il est plus petit que celle-ci.
k. S'il n'y a pas de planète plus grande que la Terre, alors la Terre est plus grande que Jupiter.
l. La Lune est une planète mais certaines choses ne sont pas des planètes.

m. Toutes les planètes ne tournent pas autour de la Terre.

n. Aucune planète n'est plus petite que Mercure.

o. Il n'y a pas de planète qui soit plus grande que la Terre tout en étant plus proche du Soleil qu'elle.

p. Il existe une planète telle que tout objet plus proche du Soleil qu'elle, est plus petit qu'elle.

q. Aucune planète n'est à la fois plus petite qu'Uranus et plus éloignée du Soleil qu'elle.

r. Si toutes les planètes tournent autour de la Terre, alors Neptune aussi.

Exercice 2

Pour chacune des formules suivantes, dites :

1. s'il s'agit (globalement) d'une négation, d'une conjonction, d'une disjonction, d'une implication, d'une formule universelle ou d'une formule existentielle
2. quelle est la portée de chaque quantificateur ;
3. quelles sont les occurrences de variables libres et celles liées

a. $\exists x(Axy \wedge Bx)$

b. $\exists x Axy \wedge Bx$

c. $\exists x \exists y Axy \rightarrow Bx$

d. $\exists x(\exists y Axy \rightarrow Bx)$

e. $\neg \exists x \exists y Axy \rightarrow Bx$

f. $\neg Bx \rightarrow (\neg \forall y(\neg Axy \vee Bx) \rightarrow Cy)$

g. $\neg \exists x(Axy \vee By)$

h. $\neg \exists x Axx \vee \exists y By$

i. $\forall x \forall y((Axy \wedge By) \rightarrow \exists z Cxz)$

j. $\forall x(\forall y Ayx \rightarrow By)$

k $\forall z\,((\forall x \alpha(x,y)) \Rightarrow \alpha(z,x))$;

l $\forall y \alpha(z,y) \Rightarrow \forall z \alpha(z,y)$;

Exercice 3

Soit $L = P, R, f, g, c$ où les symboles de relation sont P unaire et R binaire et les symboles de fonction sont f unaire, g binaire et c symbole de constante. Pour cha-cune des expressions suivantes, déterminez s'il s'agit d'une formule de L ; ou pas et dans ce cas justifiez

(1) $\forall(x,y)$, (2) $\alpha(x,y)$, (3) (x,y) , (4) $R(g(x,y))$, (5) $P(R(x,y))$, (6) (7) $R(f(x), g(y,c))$, (8) $\forall x R(x,x)$, (9) $\forall x \exists y R(x,x)$, (10) $\exists y(y\ c \wedge P(y))$, (11) $\exists x(P(f(x)) \wedge \forall y R(x,y))$, (12) $(\exists x P(f(x)) \wedge \forall y R(x,y))$, (13) $\forall x \forall x P(g(f(x),x))$, (14) $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y R(x,y))$.

Exercice 4

Soit E l'ensemble des formules $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ où $\alpha_1 : \forall x \exists y P(x, y)$

$\alpha_2 : \forall x P(x, y)$

$\alpha_3 : \exists y P(x, y)$

et F la formule $\forall x P(x, y) \wedge \forall y \overline{P(x, y)}$.

1. Montrer que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont satisfiables.
2. Pour chacune des formules $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, trouver un modèle.
3. Montrer que E est satisfiable.
4. Montrer que $E \nvDash F$.

Exercice 5

Soit F la formule: $\exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y)$.

1. Trouver un modèle pour$F$.
2. F est-elle valide ?

3.9 Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1. Le premier élément dans une traduction en logique des prédicats est l'nseble de base. Il spécifie la nature des objets manipulés. Selon l'ensemble de base choisi, l'expression peut changer.
Ainsi la traduction de la phrase "Tous les chats sont gris" sera :

1. $D = \{\text{les chats}\}$, soit le prédicat $G(x)$: "x est gris". On aura la formule $\forall x G(x)$;
2. $D = \{\text{les animaux}\}$, soient les prédicats $C(x)$: "x est un chat" et $G(x)$: "x est gris". On aura la formule $\forall x\, (C(x) \Rightarrow G(x))$;

Exercice 1

.a. Vénus est une planète
Pv

b. Le Soleil n'est pas une planète.
$\neg Ps_0$

c. Le Soleil tourne autour de la Terre.
Ts_0

d. Certaines planètes sont plus petites que la Terre.
$\exists x(Px \wedge Mxt)$

e. Toutes les planètes sont plus petites que Saturne.
$\forall x(Px \rightarrow Mxs_1)$

f. Rien n'est plus petit que la Lune.
$\neg\exists x Mxl$ ou $\forall x \neg Mxl$

g. Mercure est la planète la plus proche du Soleil.
$\forall x((Px \wedge Sxm_1) \rightarrow x = m_1)$

h. Mars est plus loin du Soleil que Pluton.
Spm_2 ou $\neg Sm_2p$

i. Si quelque chose est plus éloigné du Soleil que Pluton, alors ce n'est pas une planète.
$\forall x(Spx \rightarrow \neg Px)$ (attention donkey-sentence)

j. Si le Soleil tourne autours de la Terre, alors il est plus petit que celle-ci.
$(Ts_0 \rightarrow Ms_0t)$

k. S'il n'y a pas de planète plus grande que la Terre, alors la Terre est plus grande que Jupiter.
$(\neg\exists x(Px \wedge Mtx) \rightarrow Mjt)$ ou $(\forall x(Px \rightarrow Mxt) \rightarrow Mjt)$

l. La Lune est une planète mais certaines choses ne sont pas des planètes.
$Pl \wedge \exists x \neg Px$

m. Toutes les planètes ne tournent pas autour de la Terre.
$\neg\forall x(Px \rightarrow Tx)$

n. Aucune planète n'est plus petite que Mercure.
$\neg\exists x(Px \wedge Mxm_1)$ ou $\forall x(Px \to \neg Mxm_1)$

o. Il n'y a pas de planète qui soit plus grande que la Terre tout en étant plus proche du Soleil qu'elle.
$\neg\exists x(Px \wedge (Mtx \wedge Sxt))$ ou $\forall x(Px \to (\neg Mtx \vee \neg Sxt))$

p. Il existe une planète telle que tout objet plus proche du Soleil qu'elle, est plus petit qu'elle.
$\exists x(Px \wedge \forall y(Syx \to Myx))$

q. Aucune planète n'est à la fois plus petite qu'Uranus et plus éloignée du Soleil qu'elle.
$\neg\exists x(Px \wedge (Mxu \wedge Sux))$ ou $\forall x(Px \to (Mux \vee Sxu))$

r. Si toutes les planètes tournent autour de la Terre, alors Neptune aussi.
$(\forall x(Px \to Tx) \to Tn)$

Corrigé de l'exercice 2. Déterminons les occurrences libres et liées des trois formules données :

1 : Pour la formule $\underline{\forall \mathbf{z}((\forall \underbrace{x\alpha(x,y)}) \Rightarrow \alpha(\mathbf{z},\mathbf{x}))}$, le champs du quantificateur universel relatif à la variable x, $(\forall x)$ est indiqué par une sous-accolade et le champs du quantificateur universel relatif à la variable z, $(\forall z)$ est souligné et il n'y a pas de quantificateur relatif à la variable y, ainsi on constate que :

- la variable x à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est liée et celle à droite est libre.
- la variable z est liée tout le temps.
- la variable y est libre,

2 : Pour la formule $\underline{\forall \mathbf{y}\alpha(\mathbf{z},\mathbf{y})} \Rightarrow \underline{\underline{\forall \mathbf{z}\alpha(\mathbf{z},\mathbf{x})}}$, le champs du quantificateur universel relatif à la variable y est souligné par une seule ligne el le champs du quantificateur universel relatif à la variable z est souligné par deux lignes, ainsi on constate que :

- la variable y à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est liée et celle à droite est libre.
- la variable z à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est libre et celle à droite est liée.

a. $\boxed{\exists x(Ax\boldsymbol{y} \wedge Bx)}$ formule existentielle

b. $\boxed{\exists x Ax\boldsymbol{y}} \wedge B\boldsymbol{x}$ conjonction

c. $\boxed{\exists x \boxed{\exists y Axy}} \to B\boldsymbol{x}$ implication

d. $\boxed{\exists x(\boxed{\exists y Axy} \to Bx)}$ formule existentielle

e. $\neg \boxed{\exists x \boxed{\exists y Axy}} \to B\boldsymbol{x}$ implication

f. $\neg B\boldsymbol{x} \to (\neg \boxed{\forall y(\neg A\boldsymbol{x}y \vee B\boldsymbol{x})} \to C\boldsymbol{y})$ implication

g. $\neg \boxed{\exists x(Ax\boldsymbol{y} \vee B\boldsymbol{y})}$ négation

h. $\neg \boxed{\exists xAxx} \vee \boxed{\exists yBy}$ disjonction

i. $\boxed{\forall x \boxed{\forall y((Axy \wedge By) \to \boxed{\exists zCxz})}}$ formule universelle

j. $\boxed{\forall x(\boxed{\forall yAyx} \to B\boldsymbol{y})}$ formule universelle

Corrigé de l'exercice 3.3. Le langage donné est le suivant $L = P, R, f, g, c$ où les symboles des relations (prédicats) sont P unaire et R binaire. Les symboles de fonctions sont f unaire et g unaire. Le symbole c est un symbole de constante.
Pour chacune des expressions données de 1 jusqu'à 14, on déterminera s'il s'agit d'une formule du langage L donné. Si ce n'est pas le cas, justifier pourquoi :

1) $\forall(x, y)$ cette formule n'est pas une formule du langage donné, car il n'y a pas de prédicat dedans alors que le langage donné est un langage d'ordre 1.

2) $\alpha(x, y)$ cette formule n'est pas une formule du langage donné, car il n'y a pas de prédicat dedans alors que le langage donné est un langage d'ordre 1.

3) $g(x, y)$ cette formule n'est pas une formule du langage donné, car il n'y a pas de prédicat dedans alors que le langage donné est un langage d'ordre 1.

4) $R(g(x, y))$ cette formule n'est pas une formule du langage donné car la fonction g est binaire et dans cette formule on lui a associé deux arguments.

5) $P(R(x, y))$ cette formule n'est pas une formule du langage donné, car le langage des prédicats du premier ordre n'autorise pas la composition des prédicats.

6) $x = g(x, y)$ cette formule n'est pas une formule du langage donné car elle contient le connecteur égalité "=" qui n'a aucun sens dans ce langage d'ordre 1.

7) $R(f(x), g(x, c))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.

8) $\forall xR(x, x)$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.

9) $\forall x\exists yR(x, x)$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.

10) $\exists y(y = c \wedge P(y))$ cette formule n'est pas une formule du langage donné car elle contient le connecteur égalité "=" qui n'a aucun sens dans un langage de premier ordre.

11) $\exists x(P(f(x) \wedge \forall yR(x, y))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.

12) $(\exists x P(f(x)) \wedge \forall y R(x,y))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.

13) $\forall x \forall x P(g(f(x),x))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.

14) $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y R(x,y))$ cette formule est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.

Corrigé de l'exercice 3.4. On a $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ avec :

$$\begin{cases} \alpha_1 : \forall x \exists y P(x,y); x \text{ est lée et } y \text{ est liée.} \\ \alpha_2 : \forall x P(x,y); x \text{ est liée et } y \text{ est libre.} \\ \alpha_3 : \exists y P(x,y); x \text{ est libre et } y \text{ est liée.} \end{cases}$$

Soit la formule $F \equiv \forall x P(x,y) \wedge \forall y \overline{P(x,y)}$.

I.) Montrons que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont satisfiables :

Pour montrer qu'une formule est satisfiable, il suffit de trouver une interprétation et une valuation pour lesquelles cette formule est vraie.

Remarque : comme solution, Nous allons donner des interprétation et des valuations telles que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soient satisfiables. Cependant, ces interprétations ne sont pas uniques et vous pouvez trouver d'autres interprétations.

Pour α_1 : Nous proposons l'interprétation I_1 de domaine de base $D_1 = \mathbb{N}$, et on définit le prédicat P : " $\leq$ ". Avec cette interprétation, on a : $\alpha_1 \equiv \forall x \exists y \ (x \leq y)$. On a les deux variables x et y sont liées.

On constate que α_1 est satisfaite tout le temps car pour tout entier, on peut lui trouver un entier qui lui soit supérieur, c'est à dire α_1 est satisfaite pour toutes les valuations de I_1, ainsi I_1 est un modèle, (i.e. $I \models \alpha_1$).

Pour α_2 : Nous proposons l'interprétation I_2 de domaine de base $D_2 = \mathbb{N}^*$, et on définit le prédicat $P(x,y)$: x multiple de y. Avec cette interprétation, on a : $\alpha_2 \equiv \forall x, x$ est un multiple de y. On a la variable x est liée et la variable y est libre. Soit alors valuation $v(y) = 1$, pour cette valuation α_2 est satisfaite car tout entier non nul est un multiple de 1, donc $I_2 \models (\alpha_2)_{v(y=1}$. Cependant, I_2 n'est pas un modèle de α_2. En effet, α_2 n'est pas satisfiable pour toutes les valuations de I_2. Par exemple, la valuation $v(y) = c$ avec $c \neq 1$, α_2 n'est pas satisfaite, i.e. $I_2 \not\models \alpha_2$.

Pour α_3 : Nous proposons l'interprétation I_3 de domaine de base $D_3 = \{2,4,6,8\}$, et on définit le prédicat $P(x,y)$: "x diviseur de y". Donc, pour cette interprétation on a : $\alpha_3 \equiv \exists y,\ x$ est un diviseur de y. On a la variable x est libre et la variable y est liée. Pour la valuation $v(x) = 2$, on a $I_3(\alpha_3)$: $\exists y/2$ est un diviseur de y est satisfaite donc $I_3 \models (\alpha_3)_{v(x)=2}$. On constate que pour toutes les valuations possibles de x, la formule α_3 est satisfiable, donc I_3 est un modèle de α_3 (i.e. $I_3 \models \alpha_3$).

II.) Précédemment on a trouvé une interprétation I_1 qui est un modèle pour la formule α_1 et une interprétation I_3 qui est un modèle pour la formule α_3 Maintenant, on propose une interprétation qui soit un modèle pour l'ensemble des trois formules données $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Soit l'interprétation I' de domaine de base $D' = \{1\}$ et telle que $P(x,y)$: "$x \leq y$". avec $v(x) = v(y) = 1$. Pour cette interprétation il est facile de vérifier que : $I' \models \alpha_1,\ I' \models \alpha_2$ et $I' \models \alpha_3$, donc E est satisfiable et même plus I' est un modèle pour E (i.e. $I' \models E$).

III.) Montrons que F n'est pas une conséquence logique de E.

On a : $F \equiv \forall x P(x,y) \wedge \forall y \overline{P(x,y)}$, on constate que y est libre dans la partie gauche de $\wedge$ et x est liée.

On reprend l'interprétation I' considérée précédemment (bien sûr on aurait pu choisir une autre interprétation), pour cette interprétation I', on a montrer que :

$$I' \models E, \tag{3.1}$$

On a : $I'(F)$: $\underbrace{\underbrace{\forall x(x \leq 1)}_{vraie} \wedge \underbrace{\forall y, x > y}_{fausse}}_{fausse}$, donc :

$$I' \not\models F, \tag{3.2}$$

Alors, de (3.1) et (3.2) on conclut que F n'est pas une conséquence logique de E, i.e. $E \not\models F$.

Corrigé de l'exercice 3.5. On a : $F \equiv \exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y)$. on a la variable x est liée et la variable y est libre.

1. On va trouver un modèle pour la formule F. Soit alors l'interprétation I de domaine de base $D = \{2, 6, 20, 40\}$ et $R(x)$: "x est pair". Pour toutes les valuations possibles $\{v(y) = 2, v(y) = 6, v(y) = 20, v(y) = 40\}$ de la variable libre y, on constate que F est vraie, car :

$$\underbrace{\underbrace{\exists x R(x)}_{vraie} \Rightarrow R(y)}_{vraie}.$$

Donc I' est un modèle de F (i.e. $I' \models F$).
2. La forme prénexe de F est la suivante :

$$\begin{aligned} F &\equiv \exists x R(x) \Rightarrow R(y); \\ &\equiv \forall x \left(R(x) \Rightarrow R(y) \right). \end{aligned}$$

Remarque : on a enlevé le quantificateur de y car la variable y est libre, elle n'est pas dans le champs de ce quantificateur donc ça ne sert à rien de garder ce quantificateur.
3. La forme prénexe de la négation de la formule F c'est exactement la négation de la forme prénexe de F, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \overline{F} &\equiv \overline{\forall x[R(x) \Rightarrow R(y)]}, \\ &\equiv \exists x[R(x) \Rightarrow R(y)]. \end{aligned}$$

Remarque : il faut réviser les identités données en cours qui sont nécessaires pour trouver une forme prénexe.)
4. La forme skolem de F est exactement la forme prénexe de F car il n'y a pas de quantificateur existentiel dans la forme prénexe de F, donc :

$$F^{sko} \equiv \forall x \left(R(x) \Rightarrow R(y) \right).$$

Supplémentaire

Exercice 1

Traduire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

1 /

a. Jean est plus grand que Marie
b. Paul a vu Léa et elle ne l'a pas vu
c. Si Jean est un homme, alors il est mortel
d. Un chat est entré
e. Certains enfants ne sont pas malades
f. Tous les éléphants ont une trompe
g. Tous les hommes n'aiment pas Marie
h. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante
i. Si tous les hommes aiment Marie, alors elle est contente
j. Tous les fermiers apprécient un ministre

2 /

a. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer
b. Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question
c. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie
d. Tous les étudiants, sauf Jean, sont présents
e. Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise
f. Tout le monde a lu un livre de logique

1. $\boxed{\text{n}^o\ 1,\ \text{p } 15}$

(14)
a. Jean est plus grand que Marie $G(j,m)$
b. Paul a vu Léa et elle ne l'a pas vu $V(p,l) \wedge \neg V(l,p)$
c. Si Jean est un homme, alors il est mortel $H(j) \rightarrow M(j)$
d. Un chat est entré $\exists x(C(x) \wedge E(x))$
e. Certains enfants ne sont pas malades $\exists x(E(x) \wedge \neg M(x))$
f. Tous les éléphants ont une trompe $\forall x(E(x) \rightarrow T(x))$
g. Tous les hommes n'aiment pas Marie $\forall x(H(x) \rightarrow \neg A(x,m))$
$\neq \neg\forall x(H(x) \rightarrow A(x,m))$
h. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante $\exists x\forall y((C(x) \wedge E(y)) \rightarrow \neg C(y,x))$
$= \exists x\neg\exists y(C(x) \wedge E(y) \wedge C(y,x))$
i. Si tous les hommes aiment Marie, alors elle est contente
$(\forall x(H(x) \rightarrow A(x,m)) \rightarrow C(m))$
j. Tous les fermiers apprécient un ministre $\forall x\exists y((F(x) \wedge M(y)) \rightarrow A(x,y))$
$\neq \exists y\forall x((F(x) \wedge M(y)) \rightarrow A(x,y))$

3. $\boxed{\text{n}^o\ 3,\ \text{p } 15}$

(15)
a. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer
$(\forall x(P(x) \rightarrow \neg B(x)) \wedge \neg C(j))$
b. Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question
$(\forall x(P(x) \rightarrow \neg B(x)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(j,y)))$
c. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie
- à la même personne $\exists y\forall x((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow M(x,y))$
- pour chaque personne, il y a quelqu'un a qui... $\forall x\exists y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow M(x,y))$

d. Tous les étudiants, sauf Jean, sont présents $\forall x((E(x) \wedge x \neq j) \rightarrow P(x))$
- Autre possibilité, toujours fausse[2] $(\forall x(E(x) \rightarrow P(x)) \wedge \neg P(j))$

e. Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise
- Tout enfant fait des bêtises[3] $\forall x(E(x) \rightarrow B(x))$ $\forall x(E(x) \rightarrow \exists y(B(y) \wedge F(x,y)))$
- Aucun enfant ne fait de bêtise $\forall x(E(x) \rightarrow \neg B(x))$ $\forall x(E(x) \rightarrow \neg\exists y(B(y) \wedge F(x,y)))$

f. Tout le monde a lu un livre de logique
- Un livre a été lu par tout le monde $\exists x\forall y((LdL(x) \wedge P(y)) \rightarrow L(y,x))$
- Tout le monde a lu un livre différent $\forall y\exists x((LdL(x) \wedge P(y)) \rightarrow L(y,x))$

4. Traduire les phrases suivantes en logique des *prédicats*

(13) a. Quand quelqu'un fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde, il a tort
b. Il n'y a pas de grand champion qui n'ait causé de tort à personne
c. Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée

4. $\boxed{\text{n}^o \text{ 4, p 15}}$

• Phrase (1a) :

Procédons en essayant de faire apparaître des propriétés indépendantes :

$$\text{Quand quelqu'un } \overbrace{\text{fait confiance à quelqu'un qui } \underbrace{\text{a trompé tout le monde}}_{\Psi}}^{\Phi}\text{, il a tort}$$

– Premier niveau : *Quand quelqu'un* Φ*, il a tort*
– l'indéfini *quelqu'un* combiné avec la conditionnelle a une valeur universelle

$$\forall x\ ((Px \wedge \Phi x) \rightarrow Tx)$$

– Deuxième niveau : $\Phi x = x$ *fait confiance à quelqu'un qui* Ψ
– ambiguïté : *quelqu'un* peut être lu existentiellement ou universellement.

$$\exists y\ ((Py \wedge \Psi y) \wedge C(x,y))$$
$$\forall y\ ((Py \wedge \Psi y) \rightarrow C(x,y))$$

– Troisième niveau : $\Psi y = y$ a trompé tout le monde

$$\forall z\ (Pz \rightarrow Tr(y,z))$$

Si on met tout ensemble, cela donne :

$$\forall x\ \left(\left(Px \wedge \exists y\ \left(\left(Py \wedge \forall z\ \left(Pz \rightarrow Tr\left(y,z\right)\right)\right) \wedge C(x,y)\right)\right) \rightarrow Tx\right)$$

• Phrase (1b) : deux formules équivalentes (il y en a d'autres)

$$\neg\exists x\ \ (GCx \wedge \neg\exists y\ (Py \wedge CT(x,y)))$$
$$\neg\exists x\ \ (GCx \wedge \forall y\ (Py \rightarrow \neg CT(x,y)))$$

• Phrase (1c) : on peut discuter sur le *ou* (inclusif ou exclusif)

$$\forall x\ (Px \rightarrow (Ox \vee Fx))$$

Exercice 2

Traduire en LP_1 les phrases ci-dessous en utilisant les cinq prédicats suivants

– Mxy est vrai ssi x mange y ;
– Hx est vrai ssi x est un herbivore ;
– Vx est vrai ssi x est un (type de) végétal ;
– Bx est vrai ssi x est un bambou ;
– Px est vrai ssi x est un panda.

a. Les herbivores mangent des végétaux.

b. Les herbivores ne mangent que des végétaux.

c. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.

d. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.

e. Certains herbivores ne mangent pas de bambou.

f. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous.

Comment traduiriez-vous en français la formule suivante ?

g. $\forall x(\forall y(Mxy \rightarrow By) \rightarrow Px)$

Exercice 3 Les traductions ne sont pas toujours uniques. Remarque : ici, « les » s'interprète comme une quantification universelle (« tous les »).

a. Les herbivores mangent des végétaux.
$\forall x(Hx \to \exists y(Vy \land Mxy))$
Pour vous aider, vous pouvez commencer en remplaçant les herbivores par un nom propre ; ex : Alfred mange des végétaux. Ce qui donne : $\exists x(Vx \land Max)$.
Autre solution possible (logiquement équivalente) :
$\forall x \exists y(Hx \to (Vy \land Mxy))$
Attention, la formule suivante n'est pas une très bonne traduction :
$\exists y \forall x(Hx \to (Vy \land Mxy))$
car ça voudrait dire que tous les herbivores mangent (au moins) le même type de végétal (ce qui est beaucoup restreint que la formule précédente).

b. Les herbivores ne mangent que des végétaux.
$\forall x \forall y((Hx \land Mxy) \to Vy)$
C'es-à-dire, à peu près : « tout ce que peut manger un herbivore est végétal ».

c. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.
Ca signifie qu'il n'existe pas d'herbivore qui mange tout type de végétal (on a ainsi isolé la négation, c'est plus facile) :
$\neg \exists x(Hx \land \forall y(Vy \to Mxy))$
ou (équivalent) :
$\neg \exists x \forall y(Hx \land (Vy \to Mxy))$
On peut aussi faire voyager la négation :
$\forall x \neg \forall y(Hx \land (Vy \to Mxy))$ (pour tout herbivore, il ne mange pas tous les végétaux)
$\forall x \exists y \neg(Hx \land (Vy \to Mxy))$ (pour tout herbivore, il y a au moins un végétal qu'il ne mange pas)
$\forall x \exists y(Hx \to (Vy \land \neg Mxy))$

d. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.
$\exists x(Vx \land \forall y(Hy \to \neg Myx))$
ou
$\exists x \forall y(Vx \land (Hy \to \neg Myx))$

e. Certains herbivores ne mangent pas de bambou.
$\exists x(Hx \land \forall y(By \to \neg Mxy))$

f. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous.
$\forall x(Px \to (Hx \land \forall y(Mxy \to By)))$
ou
$\forall x(Px \to \forall y(Hx \land (Mxy \to By)))$
ou
$\forall x \forall y(Px \to (Hx \land (Mxy \to By)))$

g. $\forall x(\forall y(Mxy \to By) \to Px)$: si tout ce que mange x est du bambou, alors x est un panda (quel que soit x) : si x ne mange que du bambou, alors x est un panda (pour tout x) : il n'y a que les pandas qui ne mangent que du bambou.