المحاضرة : 06

ب- تطبيقات على الدوال

1- بعض النهايات الشهيرة

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(Lnx)^m}{x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to0^+}x^m Lnx=0 \quad , \quad \lim_{x\to0^+}x(Lnx)^m=0 \quad : \quad m\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to1}\frac{Lnx}{x-1}=1 \quad , \quad \lim_{x\to0}\frac{Ln(x+1)}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{e^x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}x^m e^x=0 \quad , \quad \lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

2- الدوال المثلثية العكسية :

1- الدالة $arcsin$

بما أن الدالة $cosx>0$ من أجل $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و $si\dot{n}x=cosx$ نحصل على جدول التغيرات

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$cosx$	+	1	+
$sinx$	-1	$\nearrow$	1

الدالة $sinx$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $]-1,1[$ فهي تقابل إذن تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $arcsin$

$$arcsin:\ ]-1,1[\ \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$sinx=t\Leftrightarrow arcsint=x$$

وبما أن الدالة المشتقة cos لا تنعدم على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فإن الدالة العكسية $arcsin$ قابلة للإشتقاق على $]-1,1[$ ولدينا

$$arcsi\dot{n}t=\frac{1}{cos(arcsint)}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2(arcsint)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

ولدينا الجدول :

x	-1	0	1
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	+	1	+
$arcsinx$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

2- الدالة $\underline{arcos}$

بما أن الدالة $-sinx < 0$ من أجل $x \in]0\,,\pi\,[$ و $cos'x = -sinx$ نحصل على جدول التغيرات

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-sinx$		-	-1	-	
$cosx$	1		$\searrow$		-1

الدالة $cosx$ مستمرة و متناقصة تماما على $]0\,,\pi\,[$ نحو $]-1\,,1\,[$ فهي تقابل إذن تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $arcos$

$$arcos: \ ]-1\,,1\,[\longrightarrow]0\,,\pi\,[$$

$$sinx = t \Leftrightarrow arcsint = x$$

وبما أن الدالة المشتقة $-sin$ لا تنعدم على $]0\,,\pi\,[$ فإن الدالة العكسية $arcos$ قابلة للإشتقاق على $]-1\,,1\,[$ ولدينا

$$arcos't = \frac{-1}{sin(arcost)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - cos^2(arcost)}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

ولدينا الجدول :

x	-1		0		1
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$		-	- 1	-	
$arcsinx$	π		$\searrow$		0

3- الدالة $\underline{arctg}$

بما أن الدالة $1 + tg^2x > 0$ من أجل $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ و $tg'x = 1 + tg^2x$ نحصل على جدول التغيرات

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$1 + tg^2x$		+	1	+	
tgx	-∞		$\nearrow$		+∞

الدالة tgx مستمرة ومتزايدة تماما على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $]-\infty,+\infty[$ فهي تقابل إذن تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $arctg$

$$arctg:\ ]-\infty,+\infty[\ \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$tgx=t \Leftrightarrow arctgt=x$$

وبما أن الدالة المشتقة $1+tg^2$ لا تنعدم على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فإن الدلة العكسية $arctg$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,+\infty[$ ولدينا

$$arct\grave{g}t=\frac{1}{(1+tg^2(arctgt))}$$

$$=\frac{1}{1+t^2}$$

ولدينا الجدول :

x	$-\infty$ 0 ∞
$\frac{1}{1+t^2}$	+ 1 +
$arctgx$	$-\frac{\pi}{2}$ ↗ $\frac{\pi}{2}$

4- خاصية : من أجل كل $x\in]-1,1[$ لدينا

$$arcsinx+arcosx=\frac{\pi}{2}$$

البرهان

$$(arcsinx+arcosx)^{`}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

ومنه الدالة $arcsinx+arcosx$ ثابتة. لنحسب قيمة هذه الدالة عند النقطة $x=0$

$$arcsin0+arcos0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

ومنه

$$arcsinx+arcosx=\frac{\pi}{2}\ ,\forall\ x\in]-1,1[$$