Table des matières

Chapitre 1

Séries entières

Dans ce chapitre, nous allons étudier les série entières qui sont des formes particulière des séries de fonctions des variables réelles ou complexes. pour cela désigne par x une variable réelle et par z une variable complexe.

1.1 Séries entières réelles(ou cmplexes)

Définition 1.1.1. *On appelle série entière rélle(resp. complexe), toute série de fonctions dont le terme général :*

$$f_n(x) = a_n x^n, \tag{1.1}$$

où $a_0, a_1, ..., a_n, ...$sont des nombres réels et $x \in \mathbb{R}$ (resp.

$$f_n(x) = a_n z^n, \tag{1.2}$$

où $a_0, a_1, ..., a_n, ...$sont des nombres complexes et $z \in \mathbb{C}$.)

Pour unifier la présentation des résultats suivants, on se place dans le cas où $x \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Lemme d'Abel

Lemme 1.1.1. *(Lemme d'Abel) Si une série entière* $\sum a_n x^n$ *converge au point* $x_0 \neq 0$*, alors elle converge absolument pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, tel que* $|x| < x_0$*.*

Démonstration. Puisque la érie entière $\sum a_n x_0^n$ converge, son terme général est borné, il existe alors $M > 0$, tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \left|a_n x_0^n\right| \leq M. \tag{1.3}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| < x_0$, nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= \left|a_n x_0^n\right| \times \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \\ &\leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \end{aligned} \tag{1.4}$$

et $\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ est le terme général d'une série géométrique converge (car $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$) ; on en déduit que la série $\sum a_n x^n$ converge absolument. □

1.1.2 Rayon de convergence dune série entière

Théorème 1.1.1. *(théorème et définition) Si une série entière* $\sum a_n x^n$ *converge au point* $x_0 \neq 0$*, alors il existe un unique élément* $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *vérifiant les deux conditions suivantes :*
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, tel que* $|x| < R$*, la série entière* $\sum a_n x^n$ *converge absolument .*
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, tel que* $|x| > R$*, la série entière* $\sum a_n x^n$ *diverge.*
Le nombre R *est appelé rayon de convergence de la série, et l'ensemble* $]-R, R[$ *est appelé intervalle de convergence.*

Démonstration. Supposons qu'il existe au moins un réel $x_0 \neq 0$, tel que la série $\sum a_n x_0^n$ converge et un réel x_1 tel que la série $\sum a_n x_1^n$ diverge.
Puisque la convergence absolue sur $[0, R[$ entraîne la convergence sur $]-R, 0]$, et la divergence sur $]R, +\infty[$ entraîne le divergence sur $]-\infty, -R[$, on va étudier la nature de $\sum a_n x^n$ sur $\mathbb{R}_+$.
Considérons alors l'ensemble D des réels positifs défini par :

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}_+, \sum a_n x^n \text{ converge.}\right\} \tag{1.5}$$

Puisque la série $\sum a_n x_0^n$ converge, D est donc non vide.
D'après la relation (1.5), l'ensemble D est majoré, il admet donc une borne supérieure non nulle $R = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} D$.
1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, tel que $x < R$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument.
La deuxième propriété de la borne supérieure affirme qu'il existe $r = x_0$ compris entre x et R, tel que $\sum a_n x^n$ converge au point x_0, donc d'après Abel, elle est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, tel que $x < x_0$.
2. Montrons maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, tel que $x > R$, la série entière $\sum a_n x^n$ diverge.
Supposons par l'absurde que $\sum a_n x^n$ converge, et considérons $y = \dfrac{R+x}{2}$. Puisque $0 < y < x$, le lemme d'Abel affirme que la série $\sum a_n y^n$ converge, y est donc un point de convergente, c'est-à-dire $y \in D$. Par suite $y \leq R$, et ceci est faux, car par construction $y = \dfrac{R+x}{2} > R$, et la série $\sum a_n x^n$ diverge. □

1.1.3 Règle de Cauchy-Hadamard

Théorème 1.1.2. *Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$ est donné par :*

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \text{ (lorsque cette limite existe).} \tag{1.6}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy sur la série de fonctions $\sum |a_n x^n|$ □

Exemple 1.1.1. *La série entière $\sum_{n\geq 1}(\dfrac{n+1}{n})^{n^2} x^n$ a pour le rayon de convergence $R = e^{-1}$.*

1.1.4 Règle de d'Alembert

Théorème 1.1.3. *Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$ est donné par :*

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1} \text{ (lorsque cette limite existe).} \tag{1.7}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de d'Alembert sur la série de fonctions $\sum |a_n x^n|$ □

Exemple 1.1.2. *La série entière* $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} x^n$ *a pour le rayon de convergence* $R = e$.

1.1.5 Convergence normale (Règle de Weierstrass)

Théorème 1.1.4. *Toute série entière* $\sum a_n x^n$ *converge normalement dans tout compact contenu dans le domaine de convergence* $]-R, R[$ *(*$R > 0$*).*

Démonstration. Soit $[-\alpha, \alpha] \subset]-R, R[$ $(\alpha > 0)$. Dans le segment $[-\alpha, \alpha]$, la série $\sum a_n x^n$ est majorée en valeur absolue par la série positive $\sum |a_n| \alpha^n$, qui est convergente, la série $\sum a_n x^n$ est donc normalement convergente. □

1.2 Propriétés des séries entières

1.2.1 Continuité de la somme d'une série entière

Théorème 1.2.1. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *non nul ; alors la somme de la série* $S(x) = \sum a_n x^n$ *est une fonction continue sur tout compact contenu dans le domaine de convergence* $]-R, R[$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, chaque fonction $f_n(x) = a^n x^n$ est continue sur $[-\alpha, \alpha]$ de $]-R, R[$ et la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$. D'après la propriété de la continuité des séries de fonctions, la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ est une fonction continue. □

Théorème 1.2.2. *(Théorème d'Abel) Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Si cette série converge pour* $x = R$ *(resp. pour* $x = -R$*), alors cette série est uniformément convergente sur* $[0, R]$ *(resp. sur* $[-R, 0]$ *) et la somme* S *de cette série est continue à gauche de* $x = R$ *(resp. à droite de* $x = -R$*), c'est-à-dire :*

$$\lim_{x \to R^-} \sum a_n x^n = \sum a_n R^n = S(R), \tag{1.8}$$

(respec.

$$\lim_{x\to -R^+} \sum a_n x^n = \sum a_n (-1)^n R^n = S(-R). \tag{1.9}$$

Démonstration. Nous faisons la démonstration dans le cas où la série converge pour $x = R$.

Considèrons la nouvelle série entière $\sum_{n\geq 0} a_n R^n y^n$ de la variable $y \in [0, 1]$.

Pour $y = 1$, la série devient $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$, qui est convergente, donc elle est uniformément convergente.

Supposons maintenant que $y \in [0, 1[$. Nous utilisons la transformation d'Abel, on peut écrire :

$$\sum_{n\geq 0} a_n R^n y^n = \sum_{n\geq 0} (a_0 + a_1 R + ... + a_n R^n) \left(y^n - y^{n+1}\right) \tag{1.10}$$

Nous pouvons voire ensuite apparaître la série de terme général :

$$g_n(y) = (a_0 + a_1 R + ... + a_n R^n) \left(y^n - y^{n+1}\right).$$

Il nous suffit de montrer que cette série est uniformément convergente.

En effet :

$$\begin{aligned} \left|g_n(y)\right| &= \left|(a_0 + a_1 R + ... + a_n R^n) \left(y^n - y^{n+1}\right)\right| \\ &\leq M(y^n - y^{n+1}), \end{aligned} \tag{1.11}$$

car $y^n - y^{n+1} \geq 0$ ((y^n) est décroissante) et la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} a_k R^k$ est bornée.

Pour tout $y \in [0, 1[$, la suite de terme général y^n converge uniformément vers 0, d'où d'après la propriété téléscopique, la série $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty} (y^n - y^{n+1})$ est uniformément convergente. Le théorème de comparaison, affirme donc la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} g_n$. Il en résulte que la série de départ $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n R^n y^n$ est uniformément convergente sur $[0, 1[$.

On en déduit alors la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n R^n y^n$ sur $[0, 1]$.

Puisque chaque fonction $a_n R^n y^n$ est continue sur $[0, 1]$, il en résulte la continuité de la somme de cette série sur $[0, 1]$, et de plus :

$$\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n R^n y^n = \begin{cases} S(yR), \text{ si } y \in [0, 1[\\ \sum_{n\geq 0} a_n R^n, \text{ si } y = 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

La continuité à gauche en $y = 1$, nous donne alors:

$$\lim_{y \to 1^-} S(yR) = S(R) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n \tag{1.13}$$

□

1.2.2 Dérivabilité d'une série de fonctions

Théorème 1.2.3. *Soit* $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence R non nul, alors sa somme S est une fonction dérivable sur tout compact* $[-r, r]$ *contenu dans le domaine de convergence* $]-R, R[$*, et pour tout* $x \in [-r, r]$*, on a :*

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(a_n x^n) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{1.14}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la entière $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence R ; alors le théorème de dérivation des séries de fonctions s'applique puisqu'une série entière converge uniformément sur tout compact contenu dans le domaine de convergence.
En effet, appelons R est le rayon de convergence de la série $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$.
1. Si $|x| < R$, la série $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ est convergente.
Puisque :

$$\left|a_{n+1} x^{n+1}\right| \leq \left|(n+1) a_{n+} x^{n+1}\right| = (n+1)\left|a_{n+} x^n\right| |x|, \tag{1.15}$$

la série $\sum \left|a_{n+} x^{n+1}\right|$ est convergente, la série $\sum a_{n+1} x^{n+1}$(ou simplement $\sum a_n x^n$) est donc convergente.
2. Si $|x| > R$, la série $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ est divergente. Prenons $y = \frac{R + |x|}{2} \in]R, |x|[$, la série $\sum (n+1) a_{n+1} y^n$ diverge et son terme général n'est pas borné.
On peut écrire :

$$\left|a_{n+1} x^{n+1}\right| = \left|(n+1) a_{n+1} y^n\right| \frac{1}{n+1} \left(\frac{|x|}{y}\right)^n. \tag{1.16}$$

Puisque $\frac{|x|}{y} > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{y}\right)^n = +\infty$, et donc $\lim_{n\to+\infty} \left|a_{n+1} x^{n+1}\right| \neq 0$.
La série $\sum a_{n+1} x^{n+1}$(ou simplement $\sum a_n x^n$) est donc divergente. □

Corollaire 1.2.1. *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *non nul, alors sa somme* S *est une fonction infiniment dérivable sur tout compact contenu dans le domaine de convergence* $]-R, R[$, *et pour tout* $x \in]-R, R[$ *et* $k \geq 1$ *on a :*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)...(n+1)a_{n+k}x^n. \tag{1.17}$$

Démonstration. Il suffit de montrer par récurrence que les séries $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)...(n+1)a_{n+k}x^n$, $k = 1, 2, ...$ ont le même rayon de convergence R. □

1.2.3 Intégration d'une série entière

Théorème 1.2.4. *Toute série entière* $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$ *est intégrable terme à terme sur tout compact contenu dans le domaine de convergence* $]-R, R[$. *En particulier, sa somme* S *vérifie :*

$$\int_0^x S(t)dx = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ pour tout } x \in]-R, R[\,. \tag{1.18}$$

Démonstration. Soit $x \in]-R, R[$. Puisque la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, x]$, la somme S est alors une fonction continue, , et donc intégrable sur $[0, x]$. L'écriture (1.18) est donc bien définie. De plus, si on dérive la série (1.18), on trouve :

$$S(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ pour tout } x \in]-R, R[\,. \tag{1.19}$$

Les deux séries entières $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty} n a_n x^n$ ont alors le même rayon de convergence R. □

Exemple 1.2.1. *Considérons la série entière de terme général :*

$$a_n x^n = \frac{x^n}{n},\ n \geq 1. \tag{1.20}$$

Le crière de d'Alembert montre que cette série est absolument convergent sur $]-1, 1[$ *et a pour somme* S.

Pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n x^n$ *est dérivable terme à terme. On a alors :*

$$\dot{S}(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ pour tout } x \in]-1,1[. \tag{1.21}$$

S est continue sur $[0,x]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle. On a alors :

$$S(x) = -\ln(1-x). \tag{1.22}$$

D'autre part, si $x=-1$, la série numérique $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge, on peut alors appliquer le théorème d'Abel 1.2.2, on en déduit que :*

$$\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2. \tag{1.23}$$

1.3 Sommes et produits des séries entières

1.3.1 Somme de deux séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement, on a alors :

Proposition 1.3.1. *Le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n)x^n$ vérifie :*

$$\begin{aligned} R &\geq \inf(R_a, R_b), \text{ si } R_a = R_b. \\ R &= \inf(R_a, R_b), \text{ si } R_a \neq R_b \end{aligned} \tag{1.24}$$

De plus, pour tout $|x| < \inf(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum (a_n + b_n)x^n = \sum a_n x^n + \sum b_n x^n. \tag{1.25}$$

Démonstration. 1. Lorsque $|x| < \inf(R_a, R_b)$, les deux séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont convergentes, la série $\sum (a_n + b_n)x^n$ est donc convergente , on en déduit que :

$$R \geq \inf(R_a, R_b). \tag{1.26}$$

Soit $R_a \neq R_b$. Supposons par exemple que $R_a < R_b$, et soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $R_a < |x| < R_b$, la série $\sum a_n x^n$ est donc divergente tandis que la série $\sum b_n x^n$ est convergente. La série $\sum (a_n + b_n) x^n$ est alors divergente, et de plus :

$$R \leq R_a = \inf(R_a, R_b). \tag{1.27}$$

De (1.26) et (1.27), on en déduit que $R = \inf(R_a, R_b)$.
2. Si $R_a = R_b$, on ne peut rien conclure sur le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) x^n$.
A titre d' exemple les deux séries entières $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$ et $-\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$ ont le même rayon de convergence $R_a = R_b = e$, tandis que la série somme est la série de terme général nul, et donc $R = +\infty$. □

1.3.2 Produit de deux séries entières

Proposition 1.3.2. *Le rayon de convergence R de la série de terme général :*

$$c_n x^n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n \tag{1.28}$$

vérifie $R \geq \inf(R_a, R_b)$. De plus, pour tout $|x| < \inf(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \times \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right). \tag{1.29}$$

Démonstration. Soit $|x| < \inf(R_a, R_b)$. Puisque les deux séries $(\sum_{n \geq 0} a_n x^n)$ et $(\sum_{n \geq 0} b_n x^n)$ sont absolument convergentes, la série de produit de Cauchy de terme général :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k x^k\right)\left(b_{n-k} x^{n-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n,$$

est également absolument convergente. On en déduit que $R \geq \inf(R_a, R_b)$ et pour tout $|x| < \inf(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n = \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} \left(a_k x^k\right)\left(b_{n-k} x^{n-k}\right) \right] = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \times \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right). \tag{1.30}$$

□

1.4 Fonctions développables en série entière (Séries de Taylor)

Dans cette partie, on va étudier le problème en sens inverse.

1.4.1 Fonctions développables en série entière

Définition 1.4.1. *Soit x_0 un réel donné et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f est développable en série entière au point x_0, s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, telle que :*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < R, \text{ on a } f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n \tag{1.31}$$

En effectuant le changement de variable $X = x - x_0$, on parle alors d'une fonction développable en série entière à l'origine.

Définition 1.4.2. *Une fonction f d'une variable complexe z est dite développable en série entière au point z_0, s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$, de rayon de convergence $R > 0$, telle que :*

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R, \text{ on a } f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n. \tag{1.32}$$

Définition 1.4.3. *Si f est indéfiniment dérivable, la série entière de terme général $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^n$ s'appelle la série de Taylor de f.*

1.4.2 Condition nécessaire de développement en série entière

Théorème 1.4.1. *Lorsqu'une fonction f est développable en série entière, alors f est de classe $C^{+\infty}$ sur tout compact contenu dans le domaine de convergence $]-R, R[$ et f coïncide avec sa série de Taylor. De plus, le développement en série entière s'il existe, il est unique.*

Démonstration. Supposons que f est développable en série entière à l'origine, il existe alors une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, telle que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, |x| < R, \text{ on a } f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = S(x), \tag{1.33}$$

où S est la somme de cette série.
D'après le théorème de la dérivation des séries entières, on déduit que f est de classe $C^{+\infty}$ sur $]-R, R[$ et de plus :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)...(n+1)a_{n+k}x^n. \tag{1.34}$$

Il en résulte que :

$$f^{(k)}(0) = a_k k!, \text{ i.e. } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \tag{1.35}$$

ce qui assure lunicité de développement. □

Remarque 1.1. *La réciproque du théorème précédent est fausse. En effet, la condition que f est de classe $C^{+\infty}$ sur tout compact contenu dans le domaine de convergence $]-R, R[$, ne suffit pas à assurer que cette fonction soit développable en série entière, même si sa série de Taylor converge. A titre d'exemple, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), \ si\ x > 0, \\ 0, \ si\ x \leq 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

Par réurrence, on peut vérifier facilement, que cette fonction est de classe $C^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée de l'ordre k de f au point 0 est nulle. Donc, si on suppose que f est développable en série entière, son développement est la série nulle, ce qui est impossible puisque $f(x) \neq 0$, pour tout $x \in]-R, R[$.

1.4.3 Condition suffisante de développement en série entière

Théorème 1.4.2. *Soit f une fonction indéfiniment dérivable d'une variable sur un intervalle $]-r, +r[$. Une condition suffisante pour que f soit développable en série* *entière est la suivante :*

$$\exists M > 0, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-r,+r[\text{ on a } \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M. \tag{1.37}$$

De plus, pour tout $x \in]-r,+r[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{1.38}$$

Démonstration. Puisque f est indéfiniment dérivable sur $]-r,+r[$, la formule de Mac-Laurin donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \text{ où } \theta \in]0,1[\,. \tag{1.39}$$

Il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = 0$. En effet, par hypothèse, on peut écrire :

$$0 \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)\right| \leq M \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|. \tag{1.40}$$

Puisque $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est le terme général d'une série convergente, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \tag{1.41}$$

Par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = 0. \tag{1.42}$$

La fonction f est bien la somme de sa série de Taylor sur $]-r,+r[$. □

1.5 Développement en série entière de fonctions usuelles

1.5.1 Les fonctions sinus et cosinus

Ces deux fonctions sont de classe $C^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$. Par récurrence, on peut vérifier facilement que leurs dérivées n *ème* sont :

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \quad (1.43)$$
$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \quad (1.44)$$

et sont bien majorées par $M = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elles sont donc développables en série entière sur $\mathbb{R}$ tout entier, ce qui signifie que $R = +\infty$. On a donc :

$$\sin(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (1.45)$$
$$\cos(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (1.46)$$

1.5.2 La fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$

Cette fonctions est de classe $C^{+\infty}$ sur tout intervalle $]-r, r[$. Par récurrence, on peut vérifier facilement sa dérivé *n ème* est également égale à $\exp(x)$, et est bien majorées par $\exp(r)$, . Elle est donc développables en série entière sur tout intervalle $]-r, r[$. Puisque r est quelconque, on en déduit que $R = +\infty$. On a donc :

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (1.47)$$

1.5.3 La fonction logarithme $x \mapsto \ln(1-x)$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en une série entière sur $]-1, 1[$. En effet, soit $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique, on peut écrire :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}/\{1\}. \quad (1.48)$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \text{ pour tout } x \in]-1, 1[. \quad (1.49)$$

En intégrant terme à terme, on obtient :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ pour tout } x \in [-1, 1[\ \left(\text{car } \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \text{ converge}\right). \tag{1.50}$$

Remarque 1.2. *On peut appliquer les techniques des parties précédentes pour obtenir à partir de ces cas autres développements. Ces techniques sont adaptées aux fonctions suivantes :*

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1.51}$$

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1.52}$$

$$\frac{1}{ax+b} = \frac{1}{b}\frac{1}{1-(-\frac{a}{b}x)} = \frac{1}{b}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{a}{b}\right)^n x^n, \text{ pour tout } x \in \left]-\left|\frac{b}{a}\right|, \left|\frac{b}{a}\right|\right[\text{ et } a, b \neq 0. \tag{1.53}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(-x^2)} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}, \text{ pour tout } x \in]-1, 1[\,. \tag{1.54}$$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ pour tout } x \in [-1, 1]\,. \tag{1.55}$$

$$\arg th(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ pour tout } x \in [-1, 1[\,. \tag{1.56}$$

1.5.4 Fonctions rationnelles

La décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simple et l'utilisation du développement en série entière de la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, nous permettent de développer en série entière une fonction rationnelle.

Exemple 1.5.1. *On considère la fonction rationnelle* $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.
On a alors

$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \ x \in]-2, 2[\,. \tag{1.57}$$

1.5.5 Application à la résolution de certaines équations différentielles

On va exposer ici sur un exemple d'une équation différentielle, une méthode qui nous permet de trouver une solution sous forme d'une fonction développable en série entière sur certain intervalle $]-r, r[$.
Considérons alors l'équation différentielle :

$$2x\dot{y} + y - \frac{1}{1-x} = 0. \tag{1.58}$$

Supposons qu'il existe une série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $r > 0$.
Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{n\geq 1} x^n. \tag{1.59}$$

Nous avons donc :

$$2x\dot{y} + y - \frac{1}{1-x} = a_0 + \sum_{n\geq 0}(2n+1)a_n x^n - \left(1 + \sum_{n\geq 1} x^n\right) = 0. \tag{1.60}$$

On en déduit que :

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1}{2n+1}. \tag{1.61}$$

Par conséquent :

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}, \text{ pour tout }]-1, 1[\tag{1.62}$$