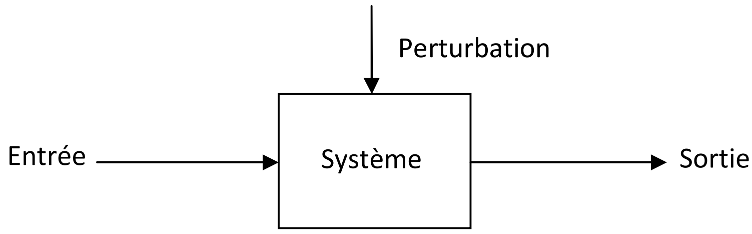
Chapitre 1

Introduction à la commande par retour d'état

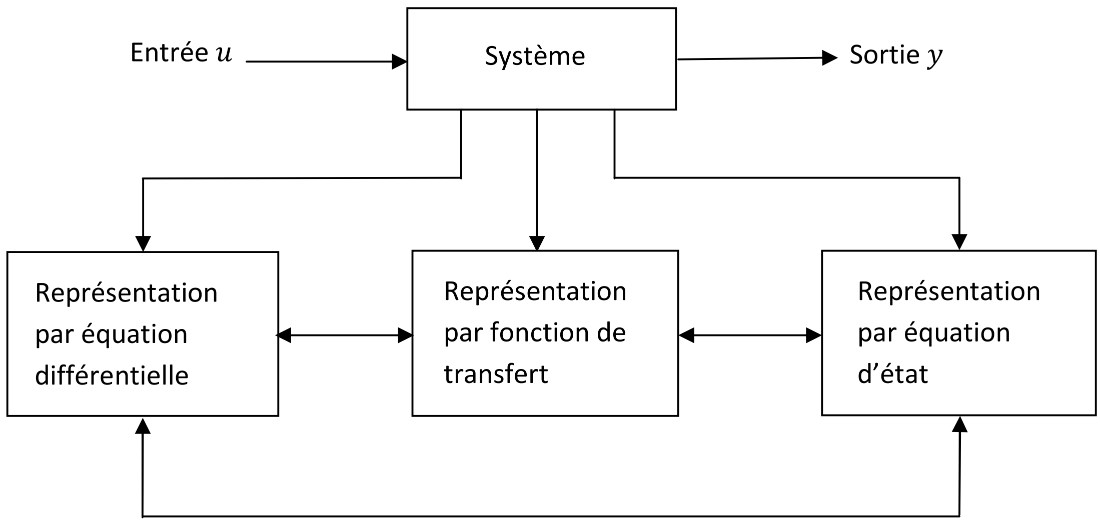
1. Introduction à la représentation d'état

Lorsque l'on envisage la commande d'un système, la 1ère étape consiste à la modéliser. Modéliser un système consiste à élaborer une représentation mathématique qui permette de décrire et prédire son comportement dynamique et permanent lorsqu'il soumit à des influences externes (entrées de commande, perturbation, …)



1.1. Les déférentes formes de modalisation

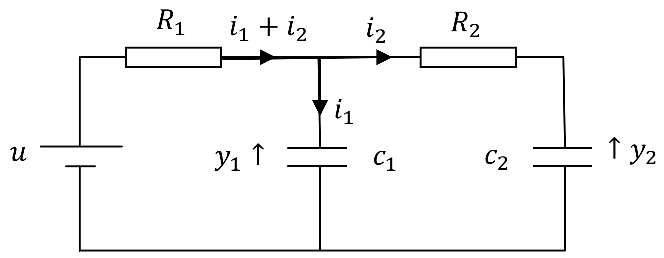
Tout système linéaire peut être représente de plusieurs manières comme le montre le schéma suivant :



Parmi les déférentes modélisations possibles d'un système seul la représentation d'état permet une approche interne.

Pour illustrer ce propose, on considère l'exemple simple suivant :

1.2.Exemple 1:



La tension au borne des condensateurs est donné par :

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int i_1(t)dt & \Rightarrow \quad \dot{y}_1 = \dfrac{i_1}{C_1} \\ y_2 = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2(t)dt & \Rightarrow \quad \dot{y}_2 = \dfrac{i_2}{C_2} \end{cases}$$

L'application des lois de Kirchhoff nous donne

$y_1 = R_2 i_2 + y_2$ ce qui implique $i_2 = \frac{y_1 - y_2}{R_2}$

$u = R_1(i_1 + i_2) + y_1$ ce qui implique $i_1 = \frac{u - y_1 - R_1 i_2}{R_1}$, d'après la formule ci-dessus de i_2, on obtient

$i_1 = \frac{1}{R_1}u - \frac{1}{R_2}y_2 - \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}y_1$, en substituant les formules de i_1 et i_2 dans les formules des tensions aux bornes des condensateurs, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\dfrac{R_1 + R_2}{R_1R_2C_1}y_1 - \dfrac{1}{R_2C_1}y_2 + \dfrac{u}{R_1C_1} \\ \dot{y}_2 = \dfrac{1}{R_2C_2}y_1 - \dfrac{1}{R_2C_2}y_2 \end{cases}$$

Posons : $\boldsymbol{x_1 = y_2}$ $\boldsymbol{et\ x_2 = y_1}$ les variables d'état et $\boldsymbol{y = y_1}$ la sortie du système, on trouve

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2c_2} & \frac{1}{R_2c_2} \\ -\frac{1}{R_2c_1} & -\frac{R_1+R_2}{R_1R_2c_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1c_1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

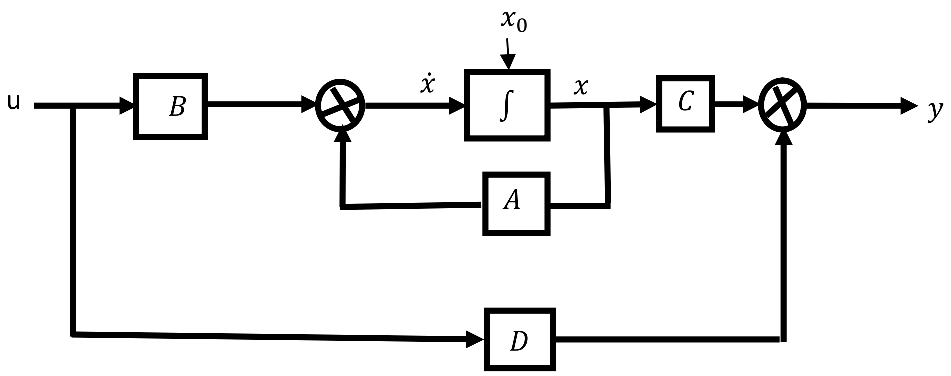
Cette représentation sous forme d'une équation différentielle de degré 1 portant sur le vecteur d'état x d'ordre 2, est appelée représentation d'état du système.

1.3.Equation d'état :

D'une manière générale, à tout système linéaire continu peut lui d'être associe les équations matricielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bx \\ y = Cx + Dx \\ x_0 = x(t_0) \end{cases}$$

- $A(n \times n)$ matrice d'état
- $x(n \times 1)$ vecteur d'état
- $u(m \times 1)$ vecteur d'entrée du système
- $y(p \times 1)$ vecteur de sortie du système
- $B(n \times m)$ matrice de commande du système
- $C(p \times n)$ matrice d'observation du système
- $D(p \times m)$ matrice de transmission directe du système



1.4.Passage de l'espace d'état vers la fonction de transfert

Soit un système représenté par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bx \\ y = Cx + Dx \end{cases}$$

En appliquant la TL aux deux côtés, on obtient

$$\begin{cases} SX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = Cx(s) + DU(s) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} X(s) = (SI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = [C(SI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}$$

Ce qui nous donne directement

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI - A)^{-1}B + D$$

1.5.Exemple 2

Soit un système donné par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-3 & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det\ (\mathrm{sI}-\mathrm{A})}=\frac{\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ 0 & s-3\end{bmatrix}}{(s+2)(s-3)}$$

$$\boldsymbol{H(s)}=[C(sI-A)^{-1}B+D]=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ 0 & s-3\end{bmatrix}}{(s+2)(s-3)}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+0$$

$$=\frac{\boldsymbol{s-2}}{\boldsymbol{s^2-s-6}}$$

Sous Matlab le calcul s'effectuer par la fonction ss2tf comme suite

A=[3 1 ; 0 -2] ; B=[0 ;1] ; C=[1 1] ; D=0 ;

[N D]=ss2tf(A,B,C,D);

H=tf(N,D);

1.6.Passage de la FT vers l'espace d'état

Soit le système représenté par la FT suivante :

$$H(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{s^n+\sum_{i=1}^{n-1} a_i s^i}$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Y(s)}{R(s)}\frac{R(s)}{U(s)}=H_1(s)H_2(s)$$

avec $H_1(s)=\frac{R(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+\sum_{i=1}^{n-1} a_i s^i}$ et $H_2(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\sum_{i=1}^{m} b_i s^i$

En écrivant $H_1(s)$ et $H_2(s)$ sous forme différentielle :

$$r^n+a_{n-1}r^{n-1}+a_{n-2}r^{n-2}+\cdots+a_1\dot{r}+a_0=u$$

$$b_m r^m+b_{m-1}r^{m-1}+\cdots+b_1\dot{r}+b_0 r=y$$

En appliquant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = \dot{r} \\ x_3 = \ddot{r} \\ \quad \vdots \\ x_n = r^{(n-1)} \end{cases}$$

on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{r} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{r} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{r} = x_4 \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_n = r^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u \end{cases}$$

et l'équation de sortie

$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_m$

En fin, voilà la représentation matricielle lorsque $n > mD = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = [b_0 b_1 \ \ldots \ b_m \ 0 \ \ 0 \ \ldots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sous Matlable calcul s'effectuer par la fonction tf2ss comme suite

N=[] ; % numérateur de la fonction de transfert

D=[] ;% dénominateur de la fonction de transfert

[A,B,C,D]=tf2ss(N,D) ;

1.7.Résolution des équations d'état :

Come une équation différentielle de degré 1, la solution d'un système d'équations différentielle présenté par les équations d'état suivantes :

$\dot{x} = Ax + Bx$, $x \in n$ et $u \in m$

est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau$$

On définie $Q(t) = e^{At}$matrice de transition du système

$$\boldsymbol{x(t) = Q(t)x(0) + \int_0^t Q(t-\tau)Bu(\tau)d\tau}$$

La question que se pose, **comment calculer $\boldsymbol{Q(t)}$, $\boldsymbol{Q(t)}$ =?**

En appliquant la TL sur l'équation d'état, on obtient

$SX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$

Après simple manipulation, on obtient

$X(s) = (SI - A)^{-1}X(0) + (SI - A)^{-1}BU(s)$

Il apparaît clairement, en confrontant cette expression à la solution générale déterminée dans le ci-dessus, soit :

$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,Bu(\tau)d\tau$

que la matrice de transition e^{At} possède pour transformée de Laplace la matrice $(s\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{A}])^{-1}$.

$\mathcal{L}\big(Q(t)\big) = \mathcal{L}(e^{At}) = (SI - A)^{-1}$

donc

$\boldsymbol{Q(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]}$

1.8. Exemple 3

Soit le système suivant soumis à $u(t)$ échelon unité :

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad \text{avec} \quad x(0) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Calculer la matrice de transition $\Phi(t)$ puis $x(t)$.

$$sI - A = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s & 1\\ -8 & s+6\end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix}s+6 & 1\\ -8 & s\end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8}$$

$$\boldsymbol{\Phi(t)} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+6}{s^2+6s+8} & \frac{1}{s^2+6s+8}\\ \frac{-8}{s^2+6s+8} & \frac{s}{s^2+6s+8}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right] & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.5}{s+2} - \frac{0.5}{s+4}\right]\\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+4}\right] & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+4}\right]\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$

1.9. Changement de bases, similitudes :

Elle permettant de passer d'une représentation d'état à une autre, considérons un vecteur $\underline{x}$ transformé de x par une matrice régulière$P$

$\boldsymbol{x^* = Px}$, det $(P) \neq 0$

La nouvelle représentation est tel que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^* = P^{-1}APx^* + P^{-1}Bu} \\ \boldsymbol{y = CPx^* + Du} \end{cases}$$

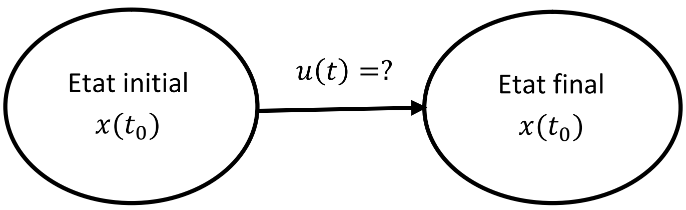
On peut montrer que les fonctions de transfert associées aux deux systèmes sont identiques. Si $H_1(s)$ est liée à x et $H_2(s)$ est liée à $\underline{x}$, donc on peut montrer que $H_1(s) = H_2(s)$.

1.10. Stabilité dans l'espace d'état

On peut démontrer que la stabilité d'un système est assurée **si les valeurs propres de la matrice d'état *A* sont à partie réel négatives.**

2. Commandabilité, et commande par placement de pôles

On dit qu'un système $x = Ax + Bx$ et $y = Cx + Dx$ où $x(t_0) = x_0$ est commandable à l'instant $t_f > t_0$ si quels que soient les états x_0 et x_f, il exixte un signal de commande $u(t)$ transférant le système de l'état x_0 à l'état x_f.



L'étude de la commandabilité, ne dépend que les matrices A et B. Pour cette raison, on dit parfois que c'est la paire (A, B) qui est commandable.

2.1. Critère de commandabilité

Le paire (A, B) est commandable si et seulement si :

$\boldsymbol{rong(M_c) = n}$ tel que $\boldsymbol{M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \ldots A^{n-1}B]}$

M_c : Matrice de commandabilité

Le paire (A, B) est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, c'est à dire $\det(M_c) \neq 0$.

2.2. Exemple 4

Etudier la commandabilité du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On trouve la matrice de commandabilité M_c et on calcul son rang

$$M_c = [B \quad AB] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$rang(M_c) = rang(A) = 2$$

On conclure que le système est commandable. On peut aussi prouver la commandabilité du système en calculant le déterminant de M_c.

$$det(M_c) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\right) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Système commandable.}$$

Sous Matlab le calcul du rang se fait par la fonction rank, le calcul de la matrice M_c par ctrb et le calcul du déterminant par la fonction det.

2.3. Commande par placement de pôles

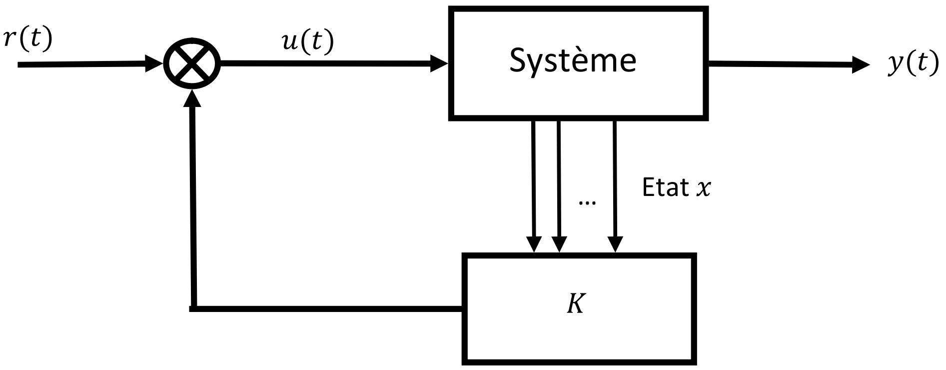
On considère un système S mono variable $(m = p = 1)$ commandable représenté par l'équation suivante :

$$S_{BO} \begin{cases} x = Ax + Bx \\ y = Cx \end{cases}$$

La stabilité et la dynamique du système S est fixés par les valeurs propres de A, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n\}$. On souhaite commander le système dans le but d'améliorer les performances par la commande suivante :

$$u(t) = r(t) - Kx(t) = r(t) - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \cdots - k_n x_n$$

où $K = [k_1 k_2 \dots k_n]$ est appelé le gain du retour d'état.



Avec cette commande les équations d'état en boucle fermée s'écrivant :

$$S_{BF}\begin{cases} x = (A - BK)x + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

2.4. Mise en œuvre pratique

On donne ci-dessous les principales étapes à suivre pour mettre en œuvre la technique de la commande par placement de pôles :

- **Méthode direct**

Calculer le gain K tel que

$$\det\big(\lambda I - (A - BK)\big) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$$

$$\sigma(A - BK) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n\}$$

Pour ce faire :

- Poser $K = [k_1 k_2 \dots k_n]$
- Calculer en fonction de K, la matrice d'état en boucle fermée $A - BK$.
- Calculer la matrice $\lambda I - (A - BK)$ et en déduire son déterminant pour obtenir le polynôme caractéristique en boucle fermée en fonction de K, $P_{BF}(\lambda)$.
- Développer le polynôme caractéristique désiré $P_{désiré}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$.
- En identifiant terme à terme les deux polynômes caractéristiques, $P_{BF}(\lambda)$ et $P_{désiré}(\lambda)$, on obtient un système d'équations dont les inconnues sont les éléments $k_i, i = 1 \dots n$.

- **Calcul de K par Matlab**

$M_c = ctrb(A, B)$;

$R = rong(M_c)$;

$K = place(A, B, \lambda)$; % λ vecteur colonne contiennent les valeurs propres désirés.

2.5. Exemple

Soit le système en boucle ouverte représenté par l'équation d'état suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Calculer la commande par retour d'état, $K =?$, assurant aux système en boucle fermé les pôles désirés $\lambda^* = [-1, -2]$.

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -0.56$ et $\lambda_2 = 3.56$ ce qui prouve l'instabilité du système en boucle ouvert.

Afin de calculer le vecteur K, on suive les étapes suivante :

- On pose $K = [k_1 k_2]$
- On calcule la matrice d'état en boucle fermée $A - BK$

$$A - BK = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 k_2] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + k_1 & -4 + k_2 \\ 2 - k_1 & 5 - k_2 \end{bmatrix}$$

- On calcule polynôme caractéristique en boucle fermée:

$$P_{BF}(\lambda) = det\big(\lambda I - (A - BK)\big) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 2 - k_1 & 4 - k_2 \\ -2 + k_1 & \lambda - 5 + k_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda^2 + (-3 - k_1 + k_2)\lambda - 2 + k_1$$

- On développe le polynôme caractéristique désiré

$$P_{désiré}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_1^*) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

- Par identification terme à terme des deux polynômes caractéristiques, $P_{BF}(\lambda)$ et $P_{désiré}(\lambda)$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -3 - k_1 + k_2 = 3 \\ \quad -2 + k_1 = 2 \end{cases}$$

sa solution est tel que : $\begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 10 \end{cases}$