Calcul des prédicats

Sémantique

1- Introduction

Considérons la formule:

$$\exists y \; \forall x \; p(y,x)$$

est-elle vraie ou fausse?

La valeur de vérité de la formule dépend de comment on "lit" le symbole p et du domaine considéré

1- Introduction

$\exists y\ \forall x\ p(y,x)$

Exemple-1

domaine = N
p(x,y) = $x \leq y$
La formule se lit:
« il existe un entier naturel inférieur ou égal à tous les entiers »
La formule est VRAIE

Exemple-2

domaine = N
p(x,y) = $x < y$
La formule se lit:
« il existe un entier naturel inférieur strictement à tous les entiers »
La formule est FAUSSE (car on n'a pas $0 < 0$)

1- Introduction

- Le but de la sémantique de la logique du 1er ordre est de:
  - Donner une signification aux symboles de prédicats
  - Donner une signification et aux symboles de fonctions
  - Fixer le domaine dans lequel les variables prennent valeur

Afin d'établir la valeur de vérité (vrai ou faux) des formules.

2- Notion de Structure

Définition

On appelle structure tout quadruplet S = (D, C, F, R) où:

- **D: est un ensemble *non vide* appelé domaine de discours**
- **C: un ensemble (vide ou non) de constantes**
- **F: un ensemble (vide ou non) de fonctions sur D**
- **R: un ensemble (vide ou non) de relations sur D**

2- Notion de Structure

Exemple

(D,C,F,R) telle que
D=N
C={0}
F={+,*, succ}
R={≤}

est une structure

(D,C,F,R) telle que
D=Réels
C={0, 1}
F={+, - , *}
R=∅

est une structure

(D,C,F,R) telle que
D=N
C={0}
F={+, - , succ}
R={≤}

N'est pas une structure
car la soustraction n'est pas interne dans N

(D,C,F,R) telle que
D=∅
C={0}
F={+,*}
R={≤}

N'est pas une structure
car le domaine est vide

2- Notion de Structure

Donner une signification

- **aux symboles de prédicats**
- **aux symboles de fonctions**
- **aux symboles de constantes**
- **et Fixer le domaine dans lequel les variables prennent valeur**

revient à associer au langage considéré (de la logique du 1er ordre) une structure.

3- Interprétation d'un langage

Définition

Soit L un langage défini par :
les constante c1,c2,..
les symboles de prédicats p1,p2,….
les symboles fonctionnels f1 f2,….

Soit S=(D,C, F, R) une structure

Une interprétation de L dans S consiste à associer :

- **A chaque constante ci de L un élément de C noté $[ci]_S$**
- **A chaque prédicat pi de L de poids n une relation n-aire de R notée $[pi]_S$.**
- **A chaque symbole fonctionnel fi de L de poids n, une fonction de F notée**

  $[fi]_S : D^n \rightarrow D$.

3- Interprétation d'un langage

Exemple-1: L1 : - constante c
- prédicat p de poids 2

S1 = (N,{0}, ∅, {<})

$[c]_{S1}=0$,

$[p(x,y)]_{S1}=x<y$

S2= ({Mohamed, Ali, Madjid }, {Mohamed},∅,{_est-frère-de_})

$[c]_{S2}$=Mohamed,

$[p(x,y]_{S2}$= x est-frère-de y

S3 = ({les amphis}, {A10},∅ ,{_est.dans.le.même.couloir.que_})

$[c]_{S3}$=A10,

$[p(x,y)]_{S3}$= x est-dans-le-même-couloir-que y)

3- Interprétation d'un langage

Exemple-2: L2: - 2 constantes c1 c2
- un prédicat p de poids 2
- un symbole fonctionnel f de poids 1
- 2 symboles fonctionnels g et h de poids 2

S1=(R, {0 ,1}, {carrée,somme, produit},{<})

$[c1]_{S1}=0$

$[c2]_{S1}=1$

$[p(x,y)]_{S1}= x<y$

$[f(x)]_{S1}= x^2$

$[g(x,y)]_{S1}= x + y$

$[h(x,y)]_{S1}=x*y$

3- Interprétation d'un langage

Remarques:

- Tout langage a au moins une structure comme interprétation (même si cette structure est abstraite).
- Un langage peut avoir plusieurs structures comme interprétations.
- Etant donnée un langage L et une structure S , Il peut exister plusieurs interprétations de L dans S.

Exemple: L: 2 constante c1,c2

$S1= (N,\{0,1\},\varnothing,\varnothing)$

2 interprétations possibles de L dans S1:

- $[c1]_{S1} = 0$ et $[c2]_{S1} = 1$
- $[c1]_{S1} = 1$ et $[c2]_{S1} = 0$

4- Valuation des variables dans une structure

Définition

Soient Var: l'ensemble des variables d'un langage L

D: le domaine d'une interprétation S de L

Une valuation V pour les variables Var dans S est une fonction

$$V: \ Var \rightarrow D$$

qui attribut à chaque variable x de Var une valeur V(x) de D.

Exemple D={3,8,9}

V(x1)=9, V(x2)=3 V(x3)=8 V(xi)= 9 si i>3 est une valuation

x=y vrai si x=4 y=4 mais fausse si x=4 y=3

5- Interprétation de Termes

Considérons par exemple le terme f(a,g(a))

où f: est un symbole de fonction de poids2
g :un symbole de fonction de poids 1
a: une constante.

- Tout d'abord ceci dépend de l'interprétation choisie.

Par exemple, soit S l'interprétation du langage de t où

D=N $[f]_S$=+ $[g]_S$ =succ $[a]_S$ =0.

Par rapport à cette interprétation, le terme f(a,g(a)) indique la somme de l'entier 0 et de 'entier successeur de 0, donc le nombre 1.

5- Interprétation de Termes

Considérons maintenant le terme f(x,g(x))

où f: est un symbole de fonction de poids2
g :un symbole de fonction de poids 1
x: une variable.

Quelle est l'évaluation du terme ?

Ceci dépend de l'entier associé à x.

Une définition précise de la valeur d'un terme t dont les variables sont x1,x2,…xn , par rapport à une interprétation S, doit donc tenir compte des éléments du domaine a1,a2,..an que l'on a choisi d'associer aux variables

5- Interprétation de Termes

Définition

Soient L : un langage

S: une structure interprétation de L

t: un terme de L

V: une valuation des variables de t

L'interprétation du terme t (dite aussi valeur de t) notée $[t]_{S,v}$ est définie par:

- Si t est une constante c alors $[t]_{S,v} = [c]_S$
- Si t est une variable x alors $[t]_{S,v} = v(x)$
- Si t est de la forme f(t1,..,tn) et $[ti]_{S,v}$ =bi alors

$$[t]_{S,v} = [f]_S ([t1]_{S,v} , [t2]_{S,v} ,\ldots[tn]_{S,v})$$

5- Interprétation de Termes

Exemple

L: - 2 constantes c1 c2
- un symbole fonctionnel f de poids 1
- 2 symboles fonctionnels g et h de poids 2

S =(D,C,F,R) une structure pour L telle que:

D= N

$[c1]_S=0$ $[c2]_S=1$

$[f(x)]_S=x^2$

$[g(x,y)]_S=x+y$

$[h(x,y)]_S=x*y$

V une valuation telle que V(x)=3, V(y) =4, V(z)=6

t1= g(y,h(c1,x)) $[t1]_{S,v} = 4 + (0*3) =4$

t2= f(g(c2, h(y,z))) $[t2]_{S,v} = (1 + (4*6))^2 = 25^2 =725$

6- Interprétation de Formules

Définition

Soit φ : une formule d'un langage L,

S: une interprétation du langage L ayant le domaine D.

V: une valuation des variables par rapport à S

L'interprétation de φ par rapport à S et V noté $[\varphi]_{S,v}$ est définie par:

- Si $\varphi = p(t1,t2,..tn)$ alors $[\varphi]_{S,v} = [p]_S \; ([t1]_{S,v}, [t2]_{S,v}, ..[tn]_{S,v})$
- Si $\varphi = t1 \equiv t2$ alors $[\varphi]_{S,v} = [t1]_{S,v} \equiv [t2]_{S,v}$
- Si $\varphi = \rceil \varphi 1$ alors $[\varphi]_{S,v} = \rceil([\varphi 1]_{S,v})$
- Si $\varphi = \varphi 1 \; K \; \varphi 2 \; K \in \{\wedge, v, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ alors $[\varphi]_{S,v} = [\varphi 1]_{S,v} \; K \; [\varphi 2]_{S,v}$
- Si $\varphi = \forall x \; \varphi 1$ alors $[\varphi]_{S,v} = \wedge_{a \in D} \; ([\varphi 1]_{S,v})[a/x]$
- Si $\varphi = \exists x \varphi 1$ alors $[\varphi]_{S,v} = V_{a \in D} \; ([\varphi 1]_{S,v})[a/x]$

7- Satisfaisabilité

Satisfaisabilité d'une formule pour une structure est une valuation

Définition

Soient L un langage du 1er ordre
φ : une formule construite sur L
S : une structure interprétation de L
V : une valuation pour l'ensemble des variables Var

φ est satisfaite dans S pour la valuation V $\Leftrightarrow$ $[\varphi]_{S,v} = 1$

φ est non satisfaite dans S pour la valuation V $\Leftrightarrow$ $[\varphi]_{S,v} = 0$

Exemple

$\forall y \; p(x,y)$ est satisfaite pour $S=(N, \varnothing, \varnothing, \{\leq\})$ et la valuation V / $V(x)=0$

$\forall y \; p(x,y)$ est non satisfaite pour $S=(N, \varnothing, \varnothing, \{\leq\})$ et la valuation V/ $V(x)=5$

7- Satisfaisabilité

Satisfaisabilité d'une formule pour une structure

Définition

Soient L un langage du 1er ordre
φ : une formule construite sur L
S : une structure interprétation de L

φ satisfaite pour S $\Leftrightarrow$ $\exists$ V telle que $[\varphi]_{S,V} = 1$

φ non satisfaite pour S $\Leftrightarrow$ $\forall$V on a $[\varphi]_{S,V} = 0$

Exemple

$\forall y\ p(x,y)$ est satisfaite pour $S=(\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \{\leq\})$ ($V(x)=0$)

$\forall y\ p(x,y)$ non satisfaite pour $S=(\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \{\geq\})$

7- Satisfaisabilité

Satisfaisabilité d'une formule

Définition

Soient L un langage du 1er ordre
φ : une formule construite sur L

φ satisfaite $\Leftrightarrow$ $\exists$ S $\exists$ V telles que $[\varphi]_{S,V} = 1$

φ non satisfaite $\Leftrightarrow$ $\forall$S $\forall$V $[\varphi]_{S,V} = 0$

Exemple

$\forall y\ p(x,y)$ est satisfaite ($S=(\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \{\leq\})$ $V(x)=0$)

$\forall y\ (p(x,y) \wedge \urcorner p(x,y))$ est non satisfaite

8- Validité

Validité d'une formule dans une structure

Définition

Soient L un langage du 1er ordre
φ : une formule construite sur L
S : une structure interprétation de L

φ valide dans une structure S $\Leftrightarrow \forall V \ [\varphi]_{S,V} = 1$

φ non valide dans une structure S $\Leftrightarrow \exists V \ [\varphi]_{S,V} = 0$

Exemple

$\forall y \ p(a,y)$ est valide dans S=(N, {0}, $\varnothing$,{$\leq$ })

$\forall x \ p(x,f(x))$ est valide dans S=(N, $\varnothing$,{succ}, {$\leq$ })

8- Validité

Validité d'une formule dans une structure

Théorème

Si φ est une formule <u>close</u> (sans variables libres) alors

φ valide $\Leftrightarrow$ φ satisfaite

Démonstration:

$\Rightarrow$? φ valide dans S $\Rightarrow$ φ satisfaite (évident)

$$\Leftarrow ? \ \left\{\begin{array}{l}\varphi \text{ satisfaite dans S} \\ \varphi \text{ close}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists v \ [\varphi]_{S,v} = 1 \\ \forall v \ [\varphi]s,v = [\varphi]s \text{ (pas de variables libres dans } \varphi)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \forall v \ [\varphi]s,v = 1$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ valide dans S}$$

8- Validité
Validité (universelle) d'une formule

Définition

Soient L un langage du 1er ordre
φ : une formule construite sur L

φ **est (universellement)valide** $\Leftrightarrow \forall S$ φ **est valide dans S**

φ **est non valide** $\Leftrightarrow \exists S$ φ **est non valide dans S**

Exemple

$\forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y)$ **est valide**

$\exists x \forall y\ \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\ \varphi(x,y)$ **est valide**

$\forall y \exists x\ \varphi(x,y) \rightarrow \exists x \forall y\ \varphi(x,y)$ **n'est pas valide**