Commande par placement de pôles pour les Système à une seule entrée et à une seule sortie

Un système linéaire stationnaire est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bx \\ y = Cx \end{cases}$$

avec $x \in \mathcal{R}^n$ et $u \in \mathcal{R}^m$ et $y \in \mathcal{R}^p$. Le triple A et B est supposés à la fois commandable, c'est-à-dire tel que la matrice de commandabilité, M_c, définie par :

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \ldots A^{n-1}B]$$

soit de rang maximum :$rang\ M_c = n$.

L'objet de l'étude est imposer au système une dynamique donnée par simple réaction d'état comme suite :

$$u = r - Kx$$

dans laquelle K représente une matrice constant dont les coefficients sont à déterminer et r représente les entrées de référence ou consignes du système.

1. **Description du système**

Dans cette hypothèse la commande u est de dimension $l = 1$. La méthode consiste à mettre le modèle du système, par le changement de base défini par la matrice P :

$$x = Px^*$$

Sous la forme canonique :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = A^*x^* + B^*u \\ y = C^*x^* \end{cases}$$

avec :

$$A^* = P^{-1}AP, \qquad B^* = P^{-1}B, \qquad C^* = CP,$$

ou A^*et B^* sont telles que :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad +$$

Cette forme de description fait apparaitre, dans la dernière linge de la matrice A^*, les coefficients du polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ de la matrice A, dont les racines sont les modes du système initial :

$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$

La commande s'écrit :

$$u = r - KPx^*,$$

soit :

$$u = r - K^*x^*,$$

Expression dans lesquelles K et $K^* = KP$ désignent des vecteurs lignes.

2. Détermination du gain de bouclage

Dans chaque cas, le système bouclé prend la forme :

$$\dot{x}^*(t) = (A^* - B^*K^*)x^* + B^*r,$$

Qui met en évidence la matrice $A^* - B^*K^*$caractérisant le régime libre.

Notons :

$$K^* = [k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*]$$

Il vient :

$$A^* - B^*K^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(k_1^* + a_0) & -(k_2^* + a_1) & -(k_3^* + a_2) & \dots & -(k_{n-1}^* + a_{n-2}) & -(k_n^* + a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Qui admet comme polynôme caractéristique :

$$P_{A^*-B^*K^*} = \lambda^n + (k_n^* + a_{n-1})\lambda^{n-1} + (k_{n-1}^* + a_{n-2})\lambda^{n-2} + \cdots + (k_{n-1}^* + a_{n-2})\lambda + (k_1^* + a_0)$$

Imposer les modes du système bouclé revient à imposer les coefficients α_i de ce polynôme, soit :

$$P_{A^*-B^*K^*} = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

On obtient alors par identification des deux expressions :

$$\alpha_0 = a_0 + k_1^*,$$

$$\alpha_1 = a_1 + k_2^*,$$

$$\alpha_{n-2} = a_{n-2} + k_{n-1}^*,$$

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + k_n^*,$$

Donc :

$$K = [\alpha_0 - a_0, \alpha_1 - a_1, \dots, \alpha_{n-1} - a_{n-1}],$$

Soit pour le système initial :

$$K = K^* P^{-1}$$

Calcul du changement de base

Il peut s'effectuer simplement par récurrence à partir des relations : $A^* = P^{-1}AP,\ B^* = P^{-1}B$. notons p_i la $i^{ème}$ colonne de P :

$$P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$$

Il vient :

$$PA^* = AP \quad \text{et} \quad PB^* = B$$

Soit :

$$[p_1, \dots, p_n]\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} = A[p_1, \dots, p_n]$$

$$p_n = B$$

Développons la première de ces relations, il vient :

$$p_{n-1} - a_{n-1}p_n = Ap_n,$$

$$p_{n-2} - a_{n-2}p_n = Ap_{n-1},$$

$$p_1 - a_1 p_n = Ap_2,$$

$$-a_0 p_n = Ap_1,$$

Soit par éliminations successives :

$$p_{n-1} = (A + a_{n-1}I)p_n,$$

$$p_{n-2} = (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)p_n,$$

$$\vdots$$

$$p_1 = (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I)p_n,$$

$$0 = (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I)p_n$$

Comme, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, toute matrice vérifie son équation caractéristique, la dernière de ces relations est toujours satisfaite. On obtient donc :

$$
\begin{aligned}
p_n &= \boldsymbol{B} \\
p_{n-1} &= (A + a_{n-1}I)B = \boldsymbol{Ap_n - a_{n-1}B} \\
p_{n-2} &= (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)B = \boldsymbol{Ap_{n-1} - a_{n-2}B} \\
&\vdots \\
p_1 &= (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1 I)B = \boldsymbol{Ap_2 - a_1 B}
\end{aligned}
$$