Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques 2020-2021 Matière *: Analyse 03*

TD N^0:1 (Suites et séries de fonctions)

1. Suites de fonctions

Exercice n°1

On se donne une suite de fonctions (f_n) définie sur une partie E_i de $\mathbb{R}$. Etudier la convergence simple et uniforme de cette suite de fonctions sur E_i dans les cas suivants :

1) $\mathrm{f}_n(x) = \dfrac{1-nx^2}{1+nx^2}$, $E_1 = [-a, a]$, puis sur $E_2 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$.

2) $\mathrm{f}_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $E_3 = [0, 1]$.

3) $\mathrm{f}_n(x) = \cos(\dfrac{5+nx}{n})$, $E_4 = \mathbb{R}$.

4) $\mathrm{f}_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx}$ et $\mathrm{f}_n(0) = 0$, $E_5 = \mathbb{R}$ puis sur $E_6 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$

7) $\mathrm{f}_n(x) = x^n(1-x)$, $E_7 = [0, 1]$.

....

2. Séries de fonctions

Exercice n°1

Soit la série de fonctions de terme général :

$$f_n(x) = \sin^2(x)\cos^n(x), \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa somme.

2) La série est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?.

Exercice n°2 On pose :

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}, \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme.

2) La série est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?.

3) Etudier la convergence normale sur $[a, b]$ puis sur $[a, +\infty[$, $(0 < a < b)$.

4) Calculer $\sum_{n\geq 1} \int_1^e f_n(x)dx$.

Res. Matière : Smail kaouache.