I-5 Caractérisation du générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe:

Dans les précédentes sections nous avons pu caractériser le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions, et par la même caractérisation nous sommes arrivés à donner une caractérisation du générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés qui satisfont à $\|T(t)\| \leq e^{wt}$. On va maintenant essayer de donner une caractérisation d'un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe en général. En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on peut voir que pour caractériser le générateur infinitésimal dans le cas général il est suffisant de caratériser le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe uniformément borné. Ceci est possible en équipant l'espace de Banach X par une autre norme équivalente pour laquelle le C_0 semi-groupe uniformément borné sera un C_0 semi-groupe de contractions pour la nouvelle norme et ensuite on utilise la caractérisation déjà donnée pour le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions.

Lemme I-5 :

Soit A un opérateur linéaire tq $]0,+\infty[\subset \rho(A)$

si $\quad \|\lambda^n R(\lambda : A)^n\| \leq M \quad , \forall n=1,2..., \ \forall \lambda > 0$

(5-1)

Alors il existe une norme $|\cdot|$, sur X, équivalente à la norme originale dans X, $\|\cdot\|$ et qui satisfait :

$$\|x\| \leq |x| \leq M \|x\| \quad , \forall x \in X$$

(5-2)

et

$$|\lambda R(\lambda : A) x| \leq |x| \quad , \forall x \in X, \forall \lambda > 0$$

(5-3)

Preuve;

Soit $u > 0$ et

$$\|x\|_u = \sup_{n \geq 0} \| u^n R(u;A)^n x \| \qquad (5-4)$$

alors il est évident que

$$\|x\| \leq \|x\|_u \leq M \|x\| \qquad (5-5)$$

et

$$\| u R(u;A) \|_u \leq 1 \qquad (5-6)$$

on peut aussi voir que

$$\| \lambda R(\lambda:A) \|_u \leq 1 \quad , \quad 0 < \lambda \leq u \qquad (5-7)$$

En effet si $y = R(\lambda:A)x$ alors

$y = R(u;A)(x + (u-\lambda)y)$ et de (5-6)

on peut déduire que

$$\|y\|_u \leq \frac{1}{u} \|x\|_u + \left(1 - \frac{\lambda}{u}\right) \|y\|_u$$

donc $\lambda \|y\|_u \leq \|x\|_u$.

De (5-5) et (5-7) il s'ensuit que

$$\|\lambda^n R(\lambda:A)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda:A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$$

pour $0<\lambda \leq \mu$ (5-8)

prenons le sup sur $n \geq 0$ au premier membre de la relation (5-8) ce qui donne

$$\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu \text{ pour } 0<\lambda\leq\mu.$$

Finalement on définit

$$|x| = \lim_{\mu\to+\infty} \|x\|_\mu \qquad (5\text{-}9)$$

Alors (5-2) découle directement de (5-5)

prenons $n=1$ dans (5-8) on aura :

$$\|\lambda R(\lambda:A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$$

et (5-3) s'ensuit en passant à la limite quand $\mu \to +\infty$.

Théorème I-12 :

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, qui satisfait $\|T(t)\| \leq M$ $(M \geq 1)$ si et seulement si

(i) A est fermé et $D(A)$ est dense dans X.

(ii) l'ensemble résolvant $\rho(A)$ contient $]0, +\infty[$ et

$$\|R(\lambda ; A)^n\| \leq M/\lambda^n \text{ pour } \lambda > 0, \; n = 1, 2 \ldots \qquad (5-10)$$

Preuve :

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Si la norme de X est changée par une norme équivalente ($T(t)$) restera aussi un C_0 semi-groupe sur X pour la nouvelle norme. le générateur infinitésimal A lui aussi ne changera pas il restera fermé et à domaine dense lorsque on passe à une norme équivalente.

Soit A le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe tq $\|T(t)\| \leq M$. définissons alors :

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\| \qquad (5-11)$$

Alors

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\| \qquad (5-12)$$

et par suite $|\cdot|$ est une norme sur X qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|$, en plus on a :

$$|T(t)x| = \sup_{s \geq 0} \|T(s)T(t)x\|$$

$$\leq \sup_{s \geq 0} \|T(s)x\| = |x| \qquad (5-13)$$

c'est-à-dire que $T(t)$ est un C_0 semi-groupe de contractions sur X muni de la norme $|\cdot|$.
Donc d'après le théorème de Hille-Yosida A est fermé et à domaine dense et des relations (5-12) et (5-13) on aura

$$|R(\lambda:A)| \leq \lambda^{-1} \quad , \forall \lambda > 0.$$

et par suite on aura :

$$\|R(\lambda:A)^n x\| \leq |R(\lambda:A)^n x| \leq \frac{1}{\lambda^n}|x|$$

$$\leq \frac{M}{\lambda^n}\|x\|$$

et par suite les conditions (i) et (ii) sont nécessaires.

Supposons que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites. D'après le Lemme I-5 il existe une norme $|\cdot|$ dans X qui satisfait (5-2) et (5-3). Donc si on considère X muni de cette nouvelle norme. A est fermé, à domaine dense avec $]0,+\infty[\subset \rho(A)$ et $|R(\lambda:A)| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$ d'après le théorème de Hille-Yosida. A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X muni de la norme $|\cdot|$

Si on revient à la norme initiale A est aussi le générateur infinitésimal ~~du~~ C_0 semi-groupe $T(t)$ et

$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|$$

ie $\|T(t)\| \leq M$.

Si $T(t)$ est un C_0 semi-groupe en général on sait d'après le théorème I-3 qu'il existe $M \geq 1$ et $w \geq 0$ tq

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}$$

Considérons le C_0 semi-groupe $S(t) = e^{-wt} T(t)$
(then) $\|S(t)\| \leq M$ et A est le générateur
alors infinitésimal de $T(t)$ si et seulement si $A - wI$ est le générateur infinitésimal de $S(t)$. En utilisant ces remarques et le théorème I-12 (précédent) on obtient le théorème suivant.

Théorème I-13 :

L'opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe qui satisfait $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ si et seulement si

(i) A est fermé et $D(A)$ est dense dans X

(ii) l'ensemble résolvant $\rho(A)$ contient $]\omega, +\infty[$ et

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n} \quad \text{pour } \lambda > \omega,\ n = 1, 2 \ldots \qquad (5\text{-}14)$$

Remarque I-4 :

La condition : $\forall \lambda$, $\lambda > \omega$ $\lambda \in \rho(A)$ et que l'estimation (5-14) ~~est~~ vérifiée implique que $\forall \lambda$ complexe qui satisfait $Re(\lambda) > \omega$ $\lambda \in \rho(A)$ et que

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad \text{pour } Re\lambda > \omega,\ n = 1, 2 \ldots \qquad (5\text{-}15)$$

Théorème I-14 :

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ sur X. Si A_λ est l'approximation Yosida de A ie
$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A)$ alors

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda} x$$

I-6 Deux formules exponentielles :

Comme nous l'avons vu précédemment (Théorème I-14) si $T(t)$ est un C_0 semi-groupe donc en quelque sorte il est égal à e^{tA} où A est le générateur infinitésimal de $T(t)$. L'égalité a bien lieu si A est borné. Dans le cas où A est non-borné le théorème I-14 donne une interprétation pour laquelle $T(t)$ est considéré comme e^{tA}.
On va donner encore deux formules de la même nature ie qui peuvent

donner une interprétation exponentielle au C_0 semi-groupe $T(t)$.

Théorème I-15 :

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe sur X.

Si
$$A(h)x = \frac{T(h)x - x}{h} \qquad (6-1)$$

alors pour tout $x \in X$ on a :
$$T(t)x = \lim_{h \searrow 0} e^{tA(h)}x \qquad (6-2)$$

et la limite est uniforme en t dans tout intervalle borné $[0,T]$.

Preuve :

Soit $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$ tq $w \geq 0$ et soit A le générateur infinitésimal de $T(t)$. Puisque pour tout $h > 0$ $A(h)$ est borné. $e^{tA(h)}$ est bien défini et encore plus puisque $A(h)$ commute avec $T(t)$ alors $T(t)$ commute avec $e^{tA(h)}$.

On a aussi :

$$\| e^{tA(h)} \| \leq e^{-\frac{t}{h}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^k \frac{\| T(hk) \|}{k!}$$

$$\leq M \exp\left\{ \frac{t}{h} (e^{wh} - 1) \right\}$$

donc pour tout h, $0 < h \leq 1$, on a.

$$\| e^{tA(h)} \| \leq M e^{t(e^w - 1)} .$$

Il est facile de vérifier que pour $x \in D(A)$, $e^{(t-s)A(h)} T(s) x$ est différentiable en s et que

$$\frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)A(h)} T(s) x \right) = - A(h) e^{(t-s)A(h)} T(s) x + e^{(t-s)A(h)} A T(s) x$$

$$= e^{(t-s)A(h)} T(s) (Ax - A(h) x) .$$

par conséquent, pour $0<h\leq 1$ et $x\in D(A)$

on a :

$$\|T(t)x - e^{tA(h)}x\| = \left\|\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)A(h)}T(s)x\right)ds\right\|$$

$$\leq \int_0^t \|e^{(t-s)A(h)}\| \, \|T(s)\| \, \|Ax - A(h)x\| ds$$

$$\leq t M^2 e^{t(e^{w}+w-1)} \|Ax - A(h)x\| \quad (6-3)$$

en passant à la limite quand $h\to 0$ alors on déduit que (6-2) est vraie pour $x\in D(A)$. Puisque $\|e^{tA(h)}\|$ et $\|T(t)\|$ sont uniformément bornés sur tout intervalle borné en t et puisque $D(A)$ est dense dans X alors (6-2) est aussi vraie pour tout $x\in X$.

Théorème I-16) (la formule exponentielle)

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe. Si A est le générateur infinitésimal de $T(t)$ alors

$$T(t)x = \lim_{n \to +\infty} \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t} ; A\right)\right]^{n} x \quad , \forall x \in X. \qquad (6-4)$$

et la limite est uniforme en t sur tout intervalle borné.

I-7 Différentiabilité :

Définition I-8)

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe sur un espace de Banach X. Le semi-groupe $T(t)$ est dit différentiable pour $t > t_0$ si pour tout $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$. $T(t)$ est dit différentiable s'il est différentiable pour $t > 0$.

On sait que d'après le théorème I-4 partie (c) que si $T(t)$ est C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal et $x \in D(A)$ alors $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour $t \geq 0$. Si en plus $T(t)$ est différentiable alors pour tout $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour $t > 0$. Notons que si $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$ alors $D(A) = X$ et Puisque A est fermé il est nécessairement borné.

Lemme I-6 :

soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe qui est différentiable pour $t > t_0$ et soit A son générateur infinitésimal alors

(a) pour $t > nt_0$, $n = 1, 2, \ldots$ $T(t) : X \to D(A^n)$ et $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$ est un opérateur linéaire borné.

(b) Pour $t > n t_0$, $n = 1, 2, \ldots$ $T^{(n-1)}_{(t)}$ est continu pour la topologie uniforme des opérateurs

Corollaire I-8 :

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe qui est différentiable pour $t > t_0$. Si $t > (n+1)t_0$ alors $T(t)$ est n fois différentiable pour la topologie uniforme des opérateurs.

Corollaire I-9 :

Si $T(t)$ est un C_0 semi-groupe différentiable alors $T(t)$ est indéfiniment différentiable pour la topologie uniforme des opérateurs

Lemme I-7 :

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe différentiable et soit A son générateur infinitésimal alors

$$T^{(n)}(t) = \left(A T\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (7\text{-}1)$$

Lemme I-8 :

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe et soit A son générateur infinitésimal. Si $T(t)$ est différentiable pour $t > t_0$ et $\lambda \in \sigma(A)$, $t > t_0$ alors $\lambda e^{\lambda t} \in \sigma(AT(t))$

Théorème I-17 :

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Si $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $t_0 > 0$ tq $T(t)$ est différentiable pour $t > t_0$.

(ii) Il existe des constantes a, b et c tq $b > 0$ et $c > 0$

$$\rho(A) \supset \Sigma_1' = \{\lambda : Re\lambda \geq a - b\log|Im\lambda|\} \quad (7\text{-}2)$$

et $\quad \|R(\lambda : A)\| \leq c|Im\lambda|$, pour $\lambda \in \Sigma_1'$, $Re\lambda \leq w$ $\quad (7\text{-}3)$

Théorème I-18)

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe satisfaisant $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$ et soit A son générateur infinitésimal. $T(t)$ est différentiable si et seulement si pour tout $b>0$ il existe a_b réel et C_b positive tq

$$\rho(A) \supset \Sigma_b' = \{ \lambda : Re\lambda > a_b - b \log|Im\lambda| \}$$

(7-4)

et

$$\|R(\lambda : A)\| \leq C_b \, |Im\lambda| \quad \text{pour } \lambda \in \Sigma_b', \; Re\lambda \leq \omega$$

(7-5)

Théorème I-19)

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ satisfaisant $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$, Si pour un certain $\mu \geq \omega$

$$\limsup_{|\tau| \to +\infty} \log|\tau| \, \|R(\mu + i\tau : A)\| = C < +\infty$$

(7-6)

alors $T(t)$ est différentiable pour $t > 3C$.

Corollaire I-10

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ satisfaisant $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$
Si pour un certain $\mu \geq \omega$

$$\limsup_{|\tau| \to +\infty} \log|\tau| \, \|R(\mu + i\tau : A)\| = 0 \qquad (7-7)$$

alors $T(t)$ est un semi-groupe différentiable

Théorème I-20

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe satisfaisant $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. S'il existe $C > 0$ et $\delta_c > 0$
tq $$\|T(t) - I\| \leq 2 - Ct \log\left(\frac{1}{t}\right)$$

pour $0 < t < \delta_c$ $\qquad (7-8)$

alors $T(t)$ est différentiable pour $t \geq \frac{3M}{C}$

Corollaire I-11:

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe et soit A son générateur infinitésimal, si A est non borné alors

$$\limsup_{t \downarrow 0} \|I - T(t)\| \geq 2. \qquad (7\text{-}9)$$