• $F[G/p, H/q] = ((p \vee q) \wedge (p \rightarrow q))$

• $(F[G/p])[H/q] = ((p \vee q) \wedge q)[H/q]$
$= ((p \vee (p \rightarrow q)) \wedge (p \rightarrow q))$

• $F[H/q, G/p] = ((p \vee q) \wedge (p \rightarrow q))$

• $(F[H/q])[G/p] = (p \wedge (p \rightarrow q))[G/p]$
$= ((p \vee q) \wedge ((p \vee q) \rightarrow q))$

• Pour la substitution simultanée l'ordre n'est pas important
$F[G/p, H/q] = F[H/q, G/p]$
• Pour la substitution séquentielle l'ordre est important
$(F[G/p])[H/q]] \neq (F[H/q])[G/p]$

II- SEMANTIQUE

Il faut maintenant un moyen de préciser le sens d'une formule. Le sens d'une formule est sa valeur de vérité (i.e. déterminer si une formule est vraie ou fausse).
$\{0,1\}$ représente l'ensemble des valeurs de vérité : La valeur 0 désigne 'faux' et la valeur 1 désigne 'vrai'.
En logique propositionnelle, la sémantique a deux principes :

- On a deux valeurs de vérité 0 et 1.
- La valeur de vérité d'une formule est déduite à partir des valeurs de vérité de ses variables propositionnelles et des connecteurs qui relient ces variables. Ces valeurs sont données par une valuation

1-<u>valuation :</u> (distribution de valeur, évaluation)

Une valuation est une application de l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P}$ vers l'ensemble $\{0,1\}$.
$V : \mathcal{P} \rightarrow \{0,1\}$: V affecte à chaque VP une valeur de vérité 1 ou 0.
Si $\mathcal{P}$ est de cardinalité n, on a 2^n valuations possibles.

<u>2-Interprétation:</u>

Pour toute valuation V, il existe une application unique $\bar{V}$ définie sur $\mathcal{F}$ qui **coïncide avec V sur** $\mathcal{P}$ (qui prolonge V à l'ensemble $\mathcal{P}$ **:** si F=p alors $\bar{V}[p]=V[p]$) et vérifie les propriétés suivantes :

1) $\bar{V}[\neg F]=1$ ssi $\bar{V}[F]=0$, $\forall F \in \mathcal{F}$
2) $\bar{V}[(F \wedge G)]=1$ ssi $\bar{V}[F]=\bar{V}[G]=1$, $\forall F,G \in \mathcal{F}$
3) $\bar{V}[(F \vee G)]=0$ ssi $\bar{V}[F]=\bar{V}[G]=0$, $\forall F,G \in \mathcal{F}$
4) $\bar{V}[(F \rightarrow G)]=0$ ssi $\bar{V}[F]=1$ et $\bar{V}[G]=0$, $\forall F,G \in \mathcal{F}$
5) $\bar{V}[(F \leftrightarrow G)]=1$ ssi $\bar{V}[F]=\bar{V}[G]$, $\forall F,G \in \mathcal{F}$

Ces conditions sont souvent écrites sous forme de tableau que l'on appelle **table de vérité des connecteurs**

p	¬p
0	1
1	0

p	q	(p∧q)	(p∨q)	(p⟶q)	(p⟷q)
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Exemples :

a) F=((p∧q)⟶r)

V une valuation /V(p)=0, V(q)=1, V(r)=0

$\bar{V}$[F]= $\bar{V}$(p∧q)⟶ $\bar{V}$(r)=[$\bar{V}$(p)∧ $\bar{V}$(q)]⟶ $\bar{V}$(r)=[V(p)∧V(q)]⟶V(r)= [0∧1]⟶0=0⟶0=**1**

b) F=((p∧q)⟶(¬q∨(p⟷r)))

V une valuation /V: V(p)=V(q)=0, V(r)=1

$\bar{V}$[F]= ?

3-Table de vérité d'une formule

La table de vérité est un tableau dans lequel on étudie toutes les valeurs possibles de la formule en fonction des valeurs des propositions élémentaires (variables propositionnelles) qui la constituent.

Afin d'étudier toutes les combinaisons possibles, **il faut 2^n lignes avec n le nombre de propositions élémentaires** puisque chaque proposition élémentaire peut prendre deux valeurs distinctes 0 ou 1 (complexité $O(2^n)$)

De plus, afin de permettre une étude claire, il est souvent utile de mettre une colonne pour proposition élémentaire et une pour chaque sous-formule (c'est-à-dire à chaque fois que l'on introduit un opérateur logique). La taille d'une table de vérité devient ainsi très rapidement conséquente et on essaye souvent de ne prendre en compte que certains cas intéressants.

Exemple: F=((p⟶q)∧¬(r⟷p))

p	q	r	(p⟶q)	(r⟷p)	¬(r⟷p)	F
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

4-Formule satisfaite / tautologie / antilogie

a) Formule satisfaite

F satisfaite ssi F vraie au moins une fois

ssi ∃V, $\bar{V}$(F)=1

Ex : (p∨q), (q⟶r)

P	q	(p∨q)

q	r	(q⟶r)

b) Formule tautologie

F est tautologie (valide) ssi F est toujours vraie (satisfaite par toute valuation)

ssi ∀ V, $\bar{V}$(F)=1

EX : (p∨¬p)

c) Formule antilogie

F est antilogie ssi Fest toujours fausse

Ssi ∀ V, $\bar{V}$(F)=0

EX : (p∧¬p)

d) Modèle d'une formule

Un modèle d'une formule est une valuation pour laquelle F est vraie

V modèle de F ssi $\bar{V}$(F)=1 (v satisfait F)

- V ⊨ de F ssi $\bar{V}$(F)=1

Exemple :F=((p∧q)∨r)

	P	**q**	**r**	**(p∧q)**	**F**
V1	0	0	0	0	0
V2	**0**	**0**	**1**	0	**1**
V3	0	1	0	0	0
V4	**0**	**1**	**1**	0	**1**
V5	1	0	0	0	0
V6	**1**	**0**	**1**	0	**1**
V7	**1**	**1**	**0**	1	**1**
V8	**1**	**1**	**1**	1	**1**

Les modèles de F sont :

V2 : V2(p)=0, V2(q)=0, V2(r)=1/$\bar{V}$(F)=1, V2 ⊨F

V4: V4(p)=0, V4(q)=1, V4(r)=1/$\bar{V}$(F)=1, V4 ⊨F

V6: V6(p)=1, V6(q)=0, V6(r)=1/$\bar{V}$(F)=1, V6 ⊨F

V7: V7(p)=1, V7(q)=1, V7(r)=0/$\bar{V}$(F)=1, V7 ⊨F

V8: V8(p)=1 V8(q)=1, V8(r)=1/$\bar{V}$(F)=1, V8 ⊨F

- V non modèle de F ssi $\bar{V}$(F)=0

V1, V3, V5 ne sont pas des modèles pour F car $\bar{V}$(F)=0 dans ces valuation

Remarques :

- F satisfaite ssi F a au moins un modèle

  ssi ∃V, V⊨F
- F tautologie (valide) ssi toute les valuations sont des modèles de F

  ssi ∀V,V⊨F

- Fantilogie (non satisfaite) ssi F n'a pas de modèles

ssi ∀V, V   F

5 Équivalence entre les formules

Il est parfois préférable de modifier une formule, de façon à rendre son expression plus simple, ou plus facile a manipuler, et ceci en gardant bien sur la sémantique de la formule (c'est-a-dire, sans modifier l'ensemble de ses modèles).

-Deux formules F et G sont dites équivalentes si pour toute valuation v, $\bar{V}$(F) = $\bar{V}$(G). On écrit dans ce cas F≡ G.

F≡ G ssi ∀ V, $\bar{V}$(F) = $\bar{V}$(G)

Ou bien

Étant données deux formules F et G, F est dite logiquement équivalente à G ssi (F⟷G) est une tautologie. On note F ≡ G

Remarques :

- Il est important de bien comprendre que ≡ est un symbole que l'on utilise pour écrire une relation entre deux formules, ce n'est pas un connecteur logique.
- F≡G n'est une formule ;
- Le symbole ⇔ est parfois utilisée par certains auteurs pour dénoté l'équivalence logique

Exemple1 : Illustrant cette méthode pour vérifier une équivalence logique extrêmement importante et utile entre les deux formules ¬(p∨q) et (¬p∧¬q) **(Loi de Morgan).**

P	q	¬p	¬q	(p∨q)	¬(p∨q)	(¬p∧¬q)
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

D'après la table de vérité, les deux colonnes des deux formules ¬(p∨q) et (¬p∧¬q) sont les même (la valeur de vérité des deux formules est la même pour tous les combinaisons possibles des valeurs des propositions p et q).

∀ V, $\bar{V}$[¬(p∨q)] = $\bar{V}$[(¬p∧¬q)]

De plus,(¬(p∨q) ↔ (¬p∧¬q)) est une **tautologie**. Par conséquent, ¬(p∨q) ≡ (¬p∧¬q).

Exemple2 :

Vérifiant que les deux formules (p ∨ (q ∧ r)) et ((p ∨ q) ∧ (p ∨ r)) sont logiquement équivalentes (**Loi de distributivité**).

p	q	R	(q ∧ r)	(p ∨ q)	(p ∨ r)	(p ∨ (q ∧ r))	((p ∨ q) ∧ (p ∨ r))
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

D'après la table de vérité, les deux colonnes des deux formules $(p\vee(q\wedge r))$ et $((p\vee q)\wedge(p\vee r))$ sont les mêmes. Par conséquent : $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.

Voici quelques équivalences usuelles :

Equivalence	Nom
$p\wedge T \equiv p$ $p\vee\bot \equiv p$	élément neutre
$p\vee T \equiv T$ $p\wedge\bot \equiv\bot$	Elément absorbant
$p\wedge p\equiv p$ $p\vee p\equiv p$	Idempotence
$\neg\neg p\equiv p$	double négation
$p\wedge q\equiv q\wedge p$ $p\vee q\equiv q\vee p$	Commutativité
$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$ $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$	Associativité
$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$	Distributivité
$\neg(p\wedge q)\equiv \neg p\vee\neg q$ $\neg(p\vee q)\equiv \neg p\wedge\neg q$	Lois de Morgan
$p\vee(p\wedge q)\equiv p$ $p\wedge(p\vee q)\equiv p$	Absorption
$p\wedge\neg p \equiv\bot$ $p\vee\neg p\equiv T$	Complément
$p\rightarrow q\equiv\neg p\vee q$	Implication

Ces équivalences sont utilisées pour transformer une formule bien formée en une autre formule bien formée qui lui est équivalente. Cela va permettre de simplifier l'écriture des formules.

Exemple3 : Vérifiant que les deux formules $\neg(p\rightarrow q)$ et $(p\wedge\neg q)$ sont logiquement équivalentes.

On peut utiliser la table de verité comme vu dans les exemples précédents. Mais dans cet exemple, on va utiliser les équivalences du tableau précédent :

$\neg(p\rightarrow q)\equiv \neg(\neg p\vee q)$ (implication)

$\equiv (\neg\neg p\wedge\neg q)$ (2 ème lois de Morgan)

$\equiv (p\wedge\neg q)$ (double négation)

Exemple4 : Vérifiant que les deux formules $\neg(p\vee(\neg p\wedge q))$ et $(\neg p\wedge\neg q)$ sont logiquement équivalentes en utilisant les équivalences du tableau :

$\neg (p \vee (\neg p\wedge q))\equiv (\neg p\wedge\neg(\neg p \wedge q))$ (2 ème lois de Morgan)

$\equiv(\neg p\wedge(\neg\neg p\vee\neg q))$ (1er lois de Morgan)

$\equiv (\neg p\wedge(p\vee\neg q))$ (involution)

$\equiv ((\neg p\wedge p)\vee(\neg p \wedge\neg q))$ (2 ème lois de distributivité)

$\equiv((p \wedge \neg p)\vee(\neg p \wedge\neg q))$ (commutativité de la conjonction)

$\equiv (\bot \vee (\neg p \wedge\neg q))$ (complément de la conjonction)

$\equiv ((\neg p \wedge\neg q) \vee\bot)$ (commutativité de la disjonction)

$\equiv(\neg p \wedge\neg q)$ (élément neutre)

Exemple5 : vérifiant que $((p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$ est une tautologie en utilisant les équivalences logique du tableau (sans utilisation de la table de vérité).

il suffit de démontrer que cette formule est équivalente à T.

$((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))\equiv (\neg (p \wedge q)\vee (p \vee q))$ (implication)

$\equiv((\neg p\vee\neg q)\vee(p \vee q))$ (1er lois de Morgan)

$\equiv(((\neg p\vee\neg q)\vee p) \vee q)$ (Associativité de la disjonction)

$\equiv(((\neg p \vee p) \vee\neg q) \vee q)$ (Commutativité de la disjonction)

$\equiv((T\vee\neg q) \vee q)$ (Complément)

$\equiv (T\vee(\neg q\vee q))$ (commutativité de la disjonction)

≡T (Élément absorbant)

6 Modèle d'un ensemble de formules

Le modèle d'un ensemble de formules Σ ⊆$\mathcal{F}$ est une valuation V pour laquelle toutes les formules propositionnelles de Σ sont vraies.

- V modèle de Σ ssi ∀F∈Σ, $\bar{V}$(F)=1
  V ⊨Σ ssi ∀F∈Σ, $\bar{V}$(F)=1
  V ⊨Σ ssi ∀F∈Σ, V⊨F
- V non modèle de Σ ssi ∃F∈Σ, $\bar{V}$(F)=0

Exemple :

Σ={(p∨q), ((p⟶q)∨r)}

	p	q	r	(p∨q)	(p⟶q)	((p⟶q)∨r)
V1	0	0	0	0	1	1
V2	0	0	1	0	1	1
V3	**0**	**1**	**0**	1	1	1
V4	**0**	**1**	**1**	1	1	1
V5	1	0	0	1	0	0
V6	**1**	**0**	**1**	1	0	1
V7	**1**	**1**	**0**	1	1	1
V8	**1**	**1**	**1**	1	1	1

Les modèles de Σ sont :

V3⊨Σ /V3 : V3 (p)=0, V3(q)=1, V3(r)=0
V4⊨Σ /V4 : V4 (p)=0, V4(q)=1, V4(r)=1
V6⊨Σ /V6 : V6 (p)=1, V6(q)=0, V6(r)=1
V7⊨Σ /V7 : V7 (p)=1, V7(q)=1, V3(r)=0
V8⊨Σ /V8 : V8 (p)=1, V8(q)=1, V8(r)=1

7 ensemble de formules consistant/ contradictoire

Soit Σ un ensemble de formules, on dit que :

- Σ est satisfaisable (consistant) ssi Σ a au moins un modèle
  ssi ∃V, V ⊨Σ
  ssi ∃V, ∀F∈Σ, $\bar{V}$(F)=1
  ssi ∃V, ∀F∈Σ, V⊨ F
- Σ contradictoire (n'est pas satisfaisable) ssi Σ n'a pas de modèles

Exemple1 : Σ={(p∨q), ((p⟶q)∨r),q}

Σ est satisfaisable car

∃V3/V3(p)=0, V3(q)=1, V3(r)=0 : $\bar{V}$(p∨q)= $\bar{V}$((p⟶q)∨r)= $\bar{V}$(q)=1

Exemple2 : Σ= {¬p,(p∧q),(p⟷¬q)}

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**(p∧q)**	**(p⟷¬q)**
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0

∀V, V⊨Σ donc Σ est contradictoire

8 Conséquence logique

Soit Σ un ensemble de formules et F est une formule.

F est conséquence logique de Σ ssi tout modèle de Σ est un modèle de F.
on note : Σ ⊢ F ssi ∀V, si V⊨Σ alors V⊨F

Exemple :

$\Sigma=\{(p\rightarrow q),(p\land\neg r),(q\lor r)\}$, $F=(p\land q)$

	p	**q**	**r**	**(p⟶q)**	**¬r**	**(p∧¬r)**	**(q∨r)**		**F=(p∧q)**
V1	0	0	0	1	1	0	0		0
V2	0	0	1	1	0	0	1		0
V3	0	1	0	1	1	0	1		0
V4	0	1	1	1	0	0	1		0
V5	1	0	0	0	1	1	0		0
V6	1	0	1	0	0	0	1		0
V7	1	1	0	1	1	1	1		1
V8	1	1	1	1	0	0	1		1

- Σ a un seul modèle :

V7 : $V7(p)=1$, $V7(q)=1$, $V7(r)=0$ /$\bar{V}$ (F)=1 $\Longrightarrow$ $V7\vDash\Sigma$

- Les modèles de F sont :

V7 : $V7(p)=1$, $V7(q)=1$, $V7(r)=0$ /$\bar{V}$ (F)=1 $\Longrightarrow$ $V7\vDash\Sigma$

V8 : $V8(p)=1$, $V8(q)=1$, $V8(r)=1$ /$\bar{V}$ (F)=1 $\Longrightarrow$ $V8\vDash\Sigma$

Tous les modèles de Σ sont des modèles de F : $\{V7\}\subseteq\{V7,V8\}$donc $\Sigma\vdash F$

9 Equivalence entre les ensembles

$\Sigma1$ et $\Sigma2$ sont équivalents si et seulement si toute formule de $\Sigma1$ est conséquence de $\Sigma2$ et toute formule de $\Sigma2$ est conséquence de $\Sigma1$.

c.-à-d. $\Sigma1$ et $\Sigma2$ sont équivalents ssi ils ont les mêmes modèles

ssi $\forall V, V\vDash\Sigma1\Leftrightarrow V\vDash\Sigma2$

Exemple :

$\Sigma1=\{(p\lor q), (p\rightarrow q)\}$, $\Sigma2=\{q, (q\lor(p\land q))\}$

	p	q	(p∨q)	(p⟶q)		(p∧q)	(q∨(p∧q))	
V1	0	0	0	1		0	0	
V2	0	1	**1**	**1**		0	1	
V3	1	0	1	0		0	0	
V4	1	1	**1**	**1**		1	1	

-Les modèles de $\Sigma1$ sont :

V2 :$V2(p)=0$, $V2(q)=1$, $\bar{V}(p\lor q)=\bar{V}$ $(p\rightarrow q)=1$ /$V2\vDash\Sigma1$
V4 :$V4(p)=1$, $V4(q)=1$, $\bar{V}(p\lor q)=\bar{V}$ $(p\rightarrow q)=1$/$V4\vDash\Sigma1$

-Les modèles de $\Sigma2$ sont :

V2 :$V2(p)=0$, $V2(q)=1$, $\bar{V}(q)=\bar{V}(q\lor(p\land q))=1$ /$V2\vDash\Sigma2$
V4 :$V4(p)=1$, $V4(q)=1$, $\bar{V}(q)=\bar{V}$ $(q\lor(p\land q))=1$/$V4\vDash\Sigma2$

$\Sigma1$ et $\Sigma2$ ont exactement les mêmes modèles donc : $\Sigma1\equiv\Sigma2$

10 Système complet de connecteurs

-Un ensemble de connecteurs logiques est dit complet s'il permet d'engendrer par composition de ses éléments tous les connecteurs possibles i.e. chaque formule est logiquement équivalente à une formule qui contient seulement les connecteurs de cet ensemble.

Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots, \alpha_K\}$ un ensemble de connecteurs d'arités quelconques.

-$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots, \alpha_K\}$ est **un système complet** ssi pout toute formule $F\in\mathcal{F}$, il existe une formule G basée sur l'alphabet $\mathcal{P}\cup\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots, \alpha_K\}\cup\{(,)\}$tel que $F\equiv G$.

-{$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_K$}est un système complet **minimal** si **aucun** de sous ensemble strict $A \subset \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_K\}$n'est un système complet de connecteurs.

Exemples :

1-{¬, ∧, ∨} est un système complet de connecteurs car :

$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$

2- {∧ ,¬} est un système complet de connecteurs

3-{∨ ,¬} est un système complet de connecteurs

4- { ¬ } n'est pas un système complet car on a au moins besoin d'un connecteur binaire

{∧ ,¬}et{∨ ,¬} **sont donc des systèmes de connecteurs complets et minimaux** par contre {¬, ∧, ∨} n'est pas minimal

11 <u>Les formes normales d'une formule</u>

- La mise sous forme normale transforme une formule en une formule équivalente normalisée plus adaptée aux calculs.
- En raison de l'associativité, on note souvent :
  $F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fk$ pour $(((F1 \wedge F2) \wedge F3) \ldots \wedge Fk)$, et
  $F1 \vee F2 \vee \ldots \vee Fk$ pour $(((F1 \vee F2) \vee F3) \ldots \vee Fk)$.

Quelques définitions :

✓ **Atome :** est une variable propositionnelle.
p, q : sont des atomes

✓ **Littéral :** est un atome ou la négation d'un atome.
p, q, ¬p, ¬q, ¬r sont des littéraux.
¬¬p n'est pas un littéral

✓ **<u>Une conjonction des littéraux</u>**
$q \wedge \neg p$, $p \wedge \neg q \wedge r$ sont des conjonctions de littéraux

✓ **<u>disjonction des littéraux (une clause)</u>**
$p \vee q$, $p \vee \neg q$, $\neg p \vee \neg q$, $p \vee \neg q \vee r$, $p \vee q \vee \neg r$

a- Forme Normale Conjonctive (FNC) (forme clausale) :

F est sou FNC ssi F est une conjonction de clauses (conjonction des disjonction de litteraux) : $F = C1 \wedge C2 \wedge \ldots \ldots Cn$. i=1,n, Ci : clause

Ex :

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$, $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg r$ sous FNC

Méthode de mise sous FNC

1) Algorithme de mise sous FNC

Début

1- Éliminer toute les occurrences des connecteurs → et ↔ en remplaçant :
$F \rightarrow G$ par $\neg F \vee G$
et $F \leftrightarrow G$ par $(\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$

2- Appliquer les lois de Morgan pour faire entrer la ¬ vers l'intérieur en remplaçant :
$\neg(F \vee G)$ par $\neg F \wedge \neg G$
$\neg(F \wedge G)$ par $\neg F \vee \neg G$

3- Éliminer les doubles négations en remplaçant ¬¬ F par F.

4- Appliquer les règles de distributivité en remplaçant:
$F \vee (G \wedge H)$ par $(F \vee G) \wedge (F \vee H)$
$(F \wedge G) \vee H$ par $(F \vee H) \wedge (G \vee H)$

Exemple1 :

F$=(p \rightarrow q) \wedge r \equiv \neg p \vee (q \wedge r)$ (1)

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$ (4) sous FNC

2) Utilisation de la table de vérité

Voyons tout d'abord l'idée sur un exemple. Il s'agit tout simplement de décrire la table de vérité ligne par ligne, on obtient naturellement ainsi une forme normale disjonctive ou conjonctive suivant la façon dont on procède.

Prenons la table de vérité d'une formule quelconque :

p	q	r	F
0	0	0	1
0	0	1	**0**
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	1

Pour obtenir une formule sous FNC,
F= (p∨q∨¬r)∧(¬p∨q∨¬r)∧(¬p∨¬q∨r)

Remarque :

- Il faut noter qu'il n'y a pas unicité de la FNC.
- On peut améliorer l'algorithme de mise sous FNC en appliquant les conseils suivants :
  - → Les clauses comportant deux littéraux opposés sont valides (tiers-exclu) et peuvent donc être supprimées (par ex. p∨q∨¬r ∨ ¬q équivaut à p∨¬r).
  - → On peut aussi supprimer les répétitions d'un littéral au sein d'une même clause (par ex.¬p∨q∨¬r ∨¬p équivaut à : ¬p∨q∨¬r.
  - → Si dans une formule clausale une clause Ci est incluse dans une clause Cj alors la clause Cj peut être supprimée (la valeur de la conjonction des deux clauses ne dépend que de la valeur de Ci).

b-Forme Normale Disjonctive (FND) :
F est sous FND ssi F est une disjonction de conjonctions de littéraux

Ex : ¬p∨(q∧r), (p∧q)∨(¬p∧q), (p∧q∧r)∨(p∧¬q)∨¬r sous FND

p, ¬p, p ∨ q et p ∧ ¬q sont des formules à la fois en FNC et FND

Méthodes de mise sous de mise sous FND :

1) **Algorithme de mise sous FND**

Idem que la méthode de mise sous FNC où le ∧ est remplacé par ∨ et le ∨ est remplacé par ∧ dans les étapes 2 et 4.

Exemple :

F=p→(q∧r)≡ ¬p∨ (q∧r) (1) sous FND

2) **Utilisation de la table de vérité :**

p	q	r	F
0	0	0	**1**
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	**1**

F= (¬p∧¬q∧¬r)∨(¬p∧q∧¬r)∨(¬p∧q∧r)∨
(p∧¬q∧¬r)∨(p∧q∧r)