

Examen

Date : 18/06/2022. Durée : 1h

Exercice 1 (10 points) Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad g_a(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$$

1) Calculer la transformée de Fourier de f (2 pts)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2) Dédurre par deux méthodes la transformée de Fourier de g_a

1^{ère} Méthode [La propriété $F(F(f(x))) = 2\Pi f(-x)$] (1.5 pts)

.....
.....
.....
.....
.....

2^{ème} Méthode [La transformée inverse de Fourier] (3 pts)

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3) Maintenant, soit l'équation avec le produit de convolution suivante

$$h * g_1(x) = g_2(x)$$

*Ecrire l'équation intégrale correspondante (1 pt)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

*Déterminer \hat{h} (1 pt)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

*Déduire la formule de h (1.5 pts)

Exercice 2 (10 points)

1) Soit $a \in \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(t) = te^{at}$. Calculer la transformée de Laplace de f par deux méthodes

1^{ère} Méthode [*Par les propriétés*] (1 pt)

.....

.....

.....

.....

.....

2^{ème} Méthode [*Par la définition*] [Et déterminer l'abscisse de la convergence simple] (2.5 pts)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Trouver la transformée de Laplace inverse de la fraction suivante (3 pts)

$$F(p) = \frac{e^p}{p^2(p-1)}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

