Chapitre 1 Fonctions holomorphes Conditions de Cauchy Riemann

Rappel sur les nombres complexes

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

- le nombre complexe z est représenté par le couple ordonnée $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$z = x + iy$, $x = Re(z) \rightarrow$ réel de z.

$y = Im(z) \rightarrow$ imaginaire de z.

- on représente le nombre complexe i par le couple $(0,1)$ tel que $i^2 = -1$.

1- Conjugué d'un nombre complexe

c'est $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = x - iy$

remarque : on a : $z.\bar{z} = x^2 + y^2$

2- Module d'un nombre complexe

c'est $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

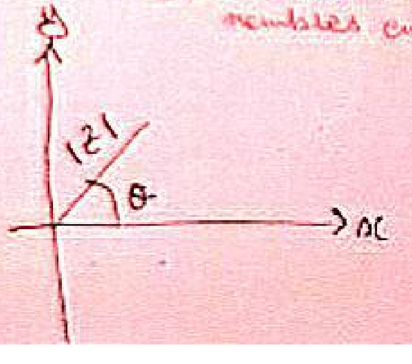
Propriétés

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ 2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 3. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

3 Argument d'un nombre complexe

c'est θ tel que $\theta = \underbrace{\arg z}_{\text{argument}} = \underbrace{Arg\, z}_{\text{valeur principale de } \theta} + 2k\pi$, $\underbrace{k \in \mathbb{Z}}_{\text{ensemble des nombres entiers}}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases} \quad , -\pi < Arg\, z \leq \pi$$



Scanned With Scanner App Lite

Exemple soit $z = 1 + i$

$x = Re(z) = 1$

$y = Im(z) = 1$

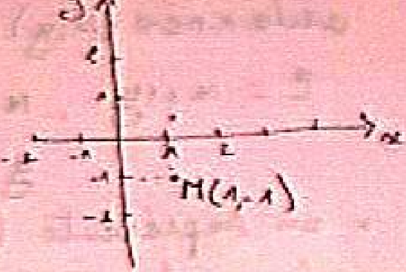
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Représentation géométrique (Graphique)

On représente un nombre complexe z dans un plan par le point $M(x, y)$

Exemple: soit $z = 1 - i \Rightarrow x = 1$
$y = -1$



Forme d'un nombre complexe

. **Forme algébrique** : c'est la formule $\begin{cases} z = Re(z) + i\,Im(z) \\ z = x + iy \end{cases}$

. **Forme polaire** : c'est la formule

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

. **Forme exponentielle**

. **Formule d'Euler** c'est la formule $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

donc la forme exponentielle de z est $z = |z|e^{i\theta}$.

Remarque: On a d'après Euler : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\Rightarrow |e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

- Formules trigonométriques ou circulaires
la formule de Euler connue dans $\mathbb{R}$ reste la même dans
$\mathbb{C}$ et donc $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $z \in \mathbb{C}$

On a : $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ... ①

$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ ... ②

① + ② $\Leftrightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

① - ② $\Leftrightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Fonction complexe :

Soit D un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$
$z \mapsto f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$

$u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ → réel de $f(z)$
$v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$ → Imaginaire de $f(z)$.

Ecrire f sous la forme $u(x,y) + i v(x,y)$

1* fonction polynôme : on remplace z par $x + iy$

Exemple $f(z) = z^2 + 5z$, $D = \mathbb{C}$ (domaine de définition)

$$f(z) = (x+iy)^2 + 5(x+iy)$$
$$= x^2 - y^2 + 2ixy + 5x + 5iy$$
$$= x^2 - y^2 + 5x + i(2xy + 5y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x = \mathrm{Re}(f(z)) \\ v(x,y) = 2xy + 5y = \mathrm{Im}(f(z)) \end{cases}$$

La fonction fractionnaire:
On remplace z par $x+iy$ et on multipli par le conjugué au l'inverse.

Exemple: $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$, $D = \mathbb{C}^*$

$$f(z) = \frac{\bar{z}.\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{(x-iy)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2-y^2-2ixy}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\,\frac{-2xy}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = -\frac{2xy}{x^2+y^2} \end{cases}$$

3) fonction exponentielle: On remplace z par $x+iy$ et on applique la formule Euler.

Exemple: $f(z) = e^z$

$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy}$.

d'après Euler $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

$\Rightarrow f(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x\cos y \\ v(x,y) = e^x\sin y \end{cases}$$

Propriétés de fonction exponentielle

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$ et $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$. $(e^z)^\alpha = e^{\alpha z}$.

fonction logarithme

Exemple: $f(z) = \ln(z)$, $D = \mathbb{C}^*$

écrire $\ln(z)$ sous la forme $u(x,y)+iv(x,y)$ on écrit sous la forme exponentielle c-à-d $z = |z|e^{i\theta}$

$\ln(z) = \ln(|z|e^{i\theta}) = \ln|z| + \ln e^{i\theta} = \ln|z| + i\theta \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \ln|z| \\ v(x,y) = \theta \end{cases}$

Propriétés d'une fonction logarithme soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$ 2. $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln(z_1) - \ln(z_2)$

3. $\ln(e^{iz}) = iz$

La limite d'une fonction complexe

Soit : $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$z_0 = x_0 + i\,y_0$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l = l_1 + i l_2 \iff \begin{cases} l_1 = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) \\ l_2 = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) \end{cases}$$

$z^2 + 5z - i = (x^2 - y^2 + 5x) + i(2xy + 5y - 1)$

Exemple : $\lim\limits_{z \to i} z^2 + 5z - i = -1 + 4i$

Remarque : ∞ n'a pas de signe dans $\mathbb{C}$

0 n'a pas " " " $\mathbb{C}$

1. $\frac{a}{\infty} = 0$ 2. $\infty \times \infty = \infty$ 3. $\frac{\infty}{a} = \infty$ 4. $a \times \infty = \infty$, $a \in \mathbb{C}^*$

La continuité dans $\mathbb{C}$

La fonction f est continue au point z_0 si : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Exemple $f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \neq i \\ 0 & \text{si } z = i \end{cases}$

est-ce que la fonction f est continue au point $z_0 = i$

solution $\lim\limits_{z \to i} f(z) = \lim\limits_{z \to i} z^2 = -1 \neq f(z_0)$ car $f(z_0) = 0$

donc f n'est pas continue en $z_0 = i$

La dérivabilité la fonction f est dérivable au point z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et finie et dans ce cas :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

exemple étudier la dérivabilité de $f(z) = z^2$ au point $z_0 = 0$

Solution $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to 0} \frac{z^2 - 0}{z} = \lim\limits_{z \to 0} z = 0$ la limite existe et est finie donc f est dérivable en $z_0 = 0$ et donc $f'(0) = 0$

-5-

Fonctions holomorphe (analytique)

Une fonction f est dite holomorphe (analytique) sur un domaine D si f est dérivable en tout point de D.

Propriété soit f et g deux fonctions holomorphes sur D alors les fonctions $f+g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ sont holomorphes aussi

Remarque:

les dérivables des fonctions connu dans $\mathbb{R}$ sont les mêmes dans $\mathbb{C}$ et donc :

1. $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$
2. $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$
3. $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$
4. $\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$
5. $\frac{d}{dz} \sqrt{z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$
6. $\frac{d}{dz} e^{\alpha z} = \alpha e^{\alpha z}$
7. $\frac{d}{dz} \sin(az+b) = a\cos(az+b)$
8. $\frac{d}{dz} \cos(az+b) = -a\sin(az+b)$
9. $\frac{d}{dz} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{1+z^2}$

Fonctions uniformes

Soit $f(z) = w$

Si une seule valeurs de w correspond à chaque valeur de z, nous dirons que $f(z)$ est uniforme.

Exemple $f(z) = z^2$

pour $z = i$ on a: $f(i) = i^2 = -1$ donc f est uniforme

Conditions de Cauchy-Riemann

soit $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ définie et uniforme

f holomorphe sur $D \iff \begin{cases} 1. \; u \text{ et } v \text{ sont dérivables} \\ 2. \; u \text{ et } v \text{ vérifient les équations} \\ \quad \text{de Cauchy-Riemann} \end{cases}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. ①

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ - ②

→ équations de Cauchy-Riemann

Exemple : $f(z) = z^3$

Montrez que f est holomorphe en utilisant les conditions de Cauchy - Riemann

Solution : Écrivons f sous la forme $u(x,y) + i v(x,y)$

remplaçons z par $x + iy$.

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = (x+iy)(x^2 - y^2 + 2ixy)$$

$$= x^3 - xy^2 + 2ix^2y + ix^2y - iy^3 - 2xy^2$$

$$= (x^3 - xy^2 - 2xy^2) + i(2x^2y + x^2y - y^3)$$

$$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

On remarque que u et v sont dérivables

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \& \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Les deux équations de Cauchy - Riemann sont réalisées donc f est holomorphe.

Fonctions harmoniques

Soit $G(x,y)$ une fonction réelle. On dit que $G(x,y)$ est [h]armonique si :

$$\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \ldots (I)$$

formule I est appelé l'équation de Laplacien.

[Ex]emple

$G(x,y) = x^2 - 2x - y^2$

[Montrer] que G est harmonique ?

[Solut]ion : $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial G}{\partial y} = -2y \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -2$

$\Delta G = 2 - 2 = 0$

donc G est harmonique

Centre Universitaire de Mila — 2021 - 2022

2ème GC - H — Maths 4

Série TD N°1

Exercice 1

1] Déterminer le conjugué de chaque nombre complexe et donner sa forme algébrique.

a. $z = i(1-i)^3$ b. $\frac{2-3i}{8+5i}$ c. $\frac{2}{i+1} - \frac{3}{1-i}$

2] Trouver le module et l'argument principal des nombres complexes suivants:

1. $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ 2. $z_2 = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 2

Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe

1] $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-3| = |z-1+i|\}$ 2] $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-4| \geq |z|\}$.

Exercice 3

1] Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

a] $(\sqrt{3}-i)^3(-1+i\sqrt{3})^5$ b) $5e^{\frac{3\pi}{4}i} + 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

2] Exprimer $\frac{(1-i)^{13}}{(\sqrt{3}-i)^{13}}$ sous la forme $re^{i\theta}$, $r>0$, $-\pi<\theta<$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes si elles existent

a) $\lim_{z \to \frac{\pi}{2}i} \frac{e^{2z}+1}{e^{z}+i}$ b) $\lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \left(\frac{z - e^{i\frac{\pi}{4}}}{z^4+1}\right)$

c) $\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

Scanned With Scanner App Lite

Exercice 5

1) Montrer que la fonction $u = x^2 - y^2 + x$ est harmonique dans $\mathbb{C}$.

2) Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.

3) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z.

Exercice 6

Déterminer les conditions sur les constantes réelles α, β, γ et λ qui rendent la fonction :
$f(z) = \alpha x + \beta y + i(\gamma x + \lambda y)$ holomorphes. En déduire f'

Solution de série TD N°1

Exercice 1

1] a) $\bar{z} = \overline{i(1-i)^3} = \overline{2-2i} = 2+2i$

$$\left[\begin{aligned} (1-i)^3 &= (1-i)(1-i)^2 \\ &= (1-i)(1-1-2i) \\ &= -2-2i \end{aligned} \quad \Rightarrow i(1-i)^3 = 2-2i \right]$$

b) $\bar{z} = \overline{\dfrac{2-3i}{8+5i}} = \dfrac{2+3i}{8-5i} = \dfrac{(2+3i)(8+5i)}{64+25} = \dfrac{1}{89} + \dfrac{34}{89}i$

c] $\bar{z} = \overline{\dfrac{2}{1+i} - \dfrac{3}{1-i}} = \dfrac{2}{1-i} - \dfrac{3}{1+i} = \dfrac{2(1+i)}{1+1} - \dfrac{3(1-i)}{1+1}$

$$= \frac{2+2i}{2} - \frac{3-3i}{2} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2}$$

2]

1* Soit le nombre complexe $z_1 = 2+2i\sqrt{3}$

$|z_1| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta_1 = \dfrac{x}{|z_1|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow \theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$

$\sin\theta_1 = \dfrac{y}{|z_1|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$

2* $z_2 = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$|z_2| = 2\sqrt{\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2} = 2\sqrt{1} = 2$

$Re\, z_2 < 0 \Rightarrow -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4}$

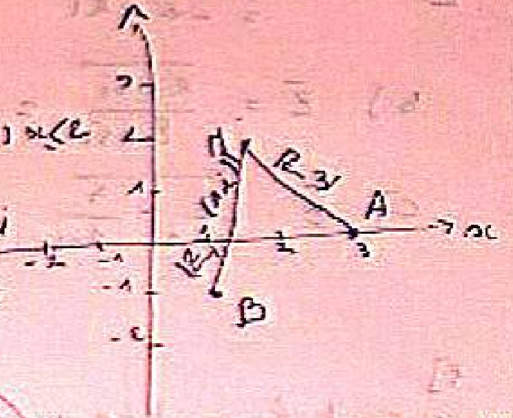
$Im\, z_2 > 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4}$ donc $\arg z_2 = \frac{3\pi}{4}$

Exercice 2

1) $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-3| = |z-1+i|\} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-3| = |z-(1-i)|\}$

On appelle M le point d'affixe z, A le point d'affixe 3 et B le point d'affixe $(1-i)$. Par conséquent

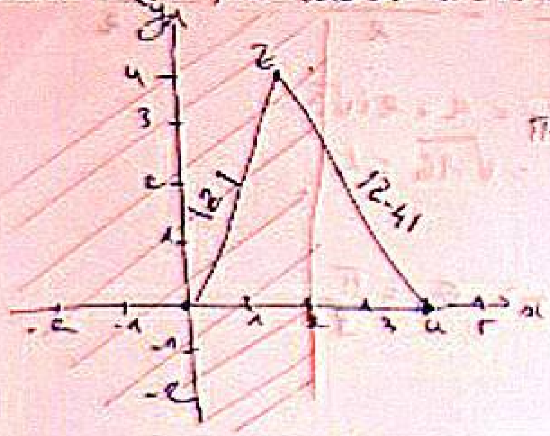
$$|z-3| = |z-(1-i)| \Leftrightarrow AM = BM$$

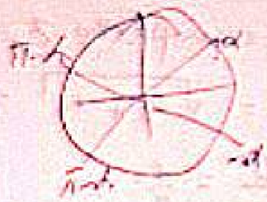


2) $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-4| \geq |z|\}$

$|z-4| \geq |z| \Leftrightarrow (x-4)^2+y^2 \geq x^2+y^2 \Leftrightarrow x\leq 2$

l'ensemble des points c'est le demi plan $x\leq 2$, la droite $x=2$ comprise





$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

formule de De Moivre

Exercice 3 $\quad z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n\{\cos(n\theta)+i\sin n\theta\}$

1 a) $(\sqrt{3}-i)^3(-1+i\sqrt{3})^5$. sous forme polaire

$\sqrt{3}-i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right],\ k\in\mathbb{Z}$

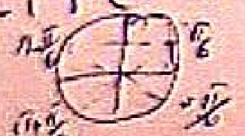
$-1+i\sqrt{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$

d'après la formule de De Moivre

$(\sqrt{3}-i)^3 = \left\{2^3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)\right]\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

$(-1+i\sqrt{3})^5 = 2^5\left\{\cos\left(\frac{10\pi}{3}+10k\pi\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{3}+10k\pi\right)\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

$(\sqrt{3}-i)^3(-1+i\sqrt{3})^5 = 2^3 2^5\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{10\pi}{3}+6k\pi+10k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{10\pi}{3}+6k\pi+10k\pi\right)\right\}$



$= 2^8\left(\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right)$

$= 2^8\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$

1) $5e^{\frac{3\pi}{4}i}+2e^{-\frac{\pi}{6}i}=5\cos\frac{3\pi}{4}+5i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-5\frac{\sqrt{2}}{2}+i5\frac{\sqrt{2}}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}-i2\cdot\frac{1}{2}$

$=\left(-5\frac{\sqrt{2}}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(5\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{2}\right)$

$=\frac{-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{5\sqrt{2}-2}{2}$

2) on $|1-i|=\sqrt{2}$ et $\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}$

$|\sqrt{3}-i|=2$ et $\arg(\sqrt{3}-i)=-\frac{\pi}{6}$

donc $(1-i)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\quad(\sqrt{3}-i)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$\frac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3}-i)^{13}}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{23}}{\left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{13}}=\frac{2^{\frac{23}{2}}e^{\frac{-23i\pi}{4}}}{2^{13}e^{\frac{-13i\pi}{6}}}$$

$$=2^{\frac{23}{2}-13}e^{-23i\frac{\pi}{4}+13i\frac{\pi}{6}}=2^{-3/2}e^{-i\frac{43}{12}\pi}=2^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{5}{12}i\pi}$$

$-\pi<\frac{5\pi}{12}\leq\pi$

Exercice 4

$$\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{e^{z}+1}{e^{z}+i}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{e^{x}\cos y+1+ie^{x}\sin(y)}{e^{x}\cos y+i(\sin y+1)}$$

$$=\frac{\cos(-\pi)+1+\sin(-\pi)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1\right)}=\frac{-1+1}{i(-1+1)}=\frac{0}{0}$$

On peut utiliser la règle de l'Hopital

$$\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{e^{z^2}+1}{e^{z}+i}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{\left(e^{z^2}+1\right)'}{\left(e^{z}+i\right)'}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{2e^{z^2}}{e^{z}}$$

$$=\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{2}i}}\left(2e^{z^2-z}\right)=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}2e^{z}$$

$$=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}2e^{x}\cos y+2ie^{x}\sin y=2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$=-2i$

$\lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \left(\frac{z - e^{i\frac{\pi}{4}}}{z^4 + 1} \right)$

On calcule les racines quatrième de -1

En écrivant -1 sous la forme polaire $-1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_k = \sqrt[4]{-1} = \left(e^{i(\pi + 2k\pi)}\right)^{\frac{1}{4}}$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_k = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{k\pi}{2}}$, $k = 0, 1, 2, 3$

- $k = 0$, $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $k = 1$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $k = 2$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
- $k = 3$, $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

En factorisant $z^4 + 1 = (z - e^{i\frac{\pi}{4}})(z - e^{i\frac{3\pi}{4}})(z - e^{-i\frac{3\pi}{4}})(z - e^{-i\frac{\pi}{4}})$

$$\lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z - e^{i\frac{\pi}{4}}}{z^4 + 1} = \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{\cancel{z - e^{i\frac{\pi}{4}}}}{\cancel{(z - e^{i\frac{\pi}{4}})}(z - e^{i\frac{3\pi}{4}})(z - e^{-i\frac{3\pi}{4}})(z - e^{-i\frac{\pi}{4}})}$$

$$= \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{(x+iy - \cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4})(x+iy - \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})) \times (x+iy - \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(i\sqrt{2})} = \frac{1}{-2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$= \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

c] $\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

$\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 0$ puisque $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$