UNIVERSITÉ MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI DE BORDJ BOU ARRÉRIDJ
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Notes de cours

Transformations intégrales dans les espaces L_p

L_3 mathématiques

BENSAID FARES

2019/2020

Table des matières

Chapitre 1

Espaces L_p

1.1 Rappels de quelques résultats d'intégration

Dans tout ce qui suit, Ω désignera un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx. Une fonction f est de $L_1(\Omega)$ si $\int_\Omega |f(x)|\,dx < +\infty$.

Théorème 1.1 (Théorème de convergence monotone de Beppo-lévi)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions croissante de L_1 telle que $\sup_n \int f_n < \infty$*. Alors, $f_n(x)$ converge* p.p. *sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$; de plus $f \in L_1$ et $\|f_n - f\|_{L_1} \to 0$.*
i.e :

$$\int \lim_{n\to+\infty} f_n dx = \lim_{n\to+\infty} \int f_n dx$$

Remarque 1.1.

- Dans le théorème précédent, c'est la suite (f_n) qui est croissante et non les fonctions f_n.
- Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables sur Ω dans $[0,+\infty]$ alors

$$\int \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n(x)dx.$$

Exemple 1.1.
On considère dans $\mathbb{R}$ muni de la tribue Boreliènne et la mesure de Lebesgue, la suite $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$. La suite f_n est monotone croissante vers $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$. Bien que les fonctions f_n soient uniformément bornées par 1 et que les intégrales des f_n sont finies, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = +\infty.$$

car le théorème de convergence monotone ne dit pas que l'intégrale de f est finie

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \lim_n n.$$

Exemple 1.2.
Soit la suite réelle définie par $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,+\infty[}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors la suite (f_n) est décroissante monotone et converge uniformément vers 0, et on a

$$0 = \int_\Omega f(x)dx \neq \lim_n \int_\Omega f_n(x)dx = +\infty.$$

Théorème 1.2 (Convergence dominée de Lebesgue)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions de L_1. On suppose que

a. $f_n(x) \to f(x)$ p.p. *sur* Ω.

b. *Il existe une fonction g de L_1 telle que pour chaque n,* $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. *sur* Ω.

Alors, $f \in L_1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L_1} \to 0$.

Exemple 1.3.
Ètudions la limite quand n tend vers l'infini de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$.
On a pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$: $|\tan(x)| < 1$, donc $\lim_{n\to\infty} \tan^n(x) = 0$. Et on a $|\tan^n(x)| \leq 1 = g(x)$, avec g intégrable sur $[0, \frac{\pi}{4}[$.
Donc, par convergence dominée on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx = \int_0^{\pi/4} 0dx = 0.$$

Théorème 1.3 (Lemme de Fatou)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions de L_1 telle que

1. *Pour chaque n,* $f_n(x) \geq 0$ p.p. *sur* Ω.
2. $\sup_n \int f_n < +\infty$

Pour chaque x de Ω on pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$.
Alors $f \in L_1(\omega)$ *et*

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n.$$

Exemple 1.4.
Soit $\Omega = [0, +\infty[$ et $f_n(x) = ne^{-nx}$. Alors, $\liminf_n f_n(x) = 0$ pour $x > 0$. Et on a

$$\int_\Omega f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} ne^{-nx}dx = 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc l'inégalité du lemme de Fatou peut-être stricte.

Corollaire 1.4.
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives, qui converge simplement vers f et telle que la suite des intégrales $\int f_n dx$ est majorée par M alors

$$\int f dx \leq M$$

Proposition 1.5 (Continuité sous l'intégrale)**.**
Soit $f : (t,x) \to f(t,x)$ une fonction de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). On suppose que

— *Pour tout $t \in I$; $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable.*
— *Pour presque tout $x \in \Omega$; $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur I.*
— *Il existe une fonction g intégrable, telle que pour tout $t \in I$ et pour presque tout $x \in \Omega$*

$$|f(t,x)| \leq g(x).$$

Alors la fonction

$$F : T \mapsto F(t) = \int f(t,x)dx$$

est bien définie pour tout $t \in I$, et est continue sur I.

Proposition 1.6 (dérivation sous l'intégrale)**.**
Soit $f : (t,x) \to f(t,x)$ une fonction de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). On suppose que

- *Pour tout $t \in I$; $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable.*
- *Pour presque tout $x \in \Omega$; $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I de dérivée notée $\frac{\partial f}{\partial t}$.*
- *Il existe une fonction g intégrable, telle que pour tout $t \in I$ et pour presque tout $x \in \Omega$*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x).$$

Alors la fonction

$$F : T \mapsto F(t) = \int f(t,x)dx$$

est dérivable sur I, et pour tout $t \in I$ on a

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx.$$

Exemple 1.5.

1. La fonction Γ est définie par

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx, \quad p \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}p > 0.$$

On pose $f(x,p) = e^{-x}x^{p-1}$ et $p = a + ib$. La fonction f est continue, et

$$|f(x.p)| \leq e^{-x}x^{a-1} = g_a(x), \quad x > 0, a > 0.$$

Pour tout $a > 0$, la fonction g_a est intégrable, donc d'après la proposition 1.5 la fonction Γ est continue pour tout $a > 0$. De plus,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\right| \leq e^{-x}|\ln x|x^{a-1} = h_a(x), \quad x > 0,\ a > 0.$$

Comme h_a est intégrable, on peut appliquer la proposition 1.6. Donc Γ est dérivable, et on a

$$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x}(\ln x)x^{p-1}dx.$$

Par les mêmes arguments on peut montrer que $\Gamma \in C^\infty$, et

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x}(\ln x)^k x^{p-1}dx.$$

2. Soit F la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(x^2+1)}dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On a F dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}+e^{-itx}}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}dx \end{aligned}$$

On peut calculer cette intégrale (analyse complexe) et on trouvera $F'(t) = \frac{\pi}{2}e^{-|t|}$. De plus, $F(0) = 0$ alors $F(t) = \mathrm{sgn}(t)\frac{\pi}{2}(1 - e^{-|t|})$.

Définition 1.1. Soit f une fonction définie sur E evn, le support de f est défini par :

$$\text{supp} = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$$

On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact.

Exemple 1.6.
Soit $a > 0$ et f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1/a \\ e^{-\frac{1}{1-a^2x^2}} & \text{si} \quad |x| < 1/a. \end{cases}$$

Son support est $[-1/a, 1/a]$

Proposition 1.7 (Théorème de densité)**.**
L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L_1(\Omega)$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \forall f \in L_1(\Omega), \exists g \in C_c(\Omega) : \|f - g\|_{L_1} < \varepsilon.$$

L'exemple suivant va nous permettre de voir une des applications de la densité de C_c dans L_1.

Exemple 1.7. On va démontrer un résultat connu sous le nom de *Lemme de Reimann-Lebesgue* qui est

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(nx)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(nx)dx = 0,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable.
Alors, prenons une suite de fonctions intégrables (f_k), qui converge vers une fonction intégrable f. Si la propriété est vraie pour toutes les fonctions f_k on vérifie qu'elle est vraie pour f en vertu des inégalités :

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(nx)dx\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - f_k(x))\cos(nx)dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\cos(nx)dx\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_k(x)|\,dx + \left|\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\cos(nx)dx\right|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(nx)dx\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - f_k(x))\sin(nx)dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\sin(nx)dx\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_k(x)|\,dx + \left|\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\sin(nx)dx\right| \end{aligned}$$

L'espace vectoriel des fonctions continues à support compact est dense dans $L_1(\mathbb{R})$, et par conséquent, il suffit de se limiter au cas où $f \in C_c(\mathbb{R})$. f est alors Reimann-intégrable et on peut l'approcher par une suite de fonctions en escalier à support compact. Une fonction en escalier étant une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'intervalles, donc on peut établir le résultat où f est une fonction caractéristique d'un intervalle. Soit en effet $f = 1\!\!\mathrm{I}_{[a,b]}$ $(a < b)$ une telle fonction, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} 1\!\!\mathrm{I}_{[a,b]}(x)\cos(nx)dx &= \int_a^b \cos(nx)dx = \frac{\sin(nb) - \sin(na)}{n} \\ \int_{\mathbb{R}} 1\!\!\mathrm{I}_{[a,b]}(x)\sin(nx)dx &= \int_a^b \sin(nx)dx = \frac{\cos(na) - \cos(nb)}{n}, \end{aligned}$$

et, en faisant tendre n à l'infini on trouvera le résultat voulu.

Théorème 1.8 (Tonelli). *Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que*

$$\int_{\Omega_1} |F(x,y)|\, dy < \infty, \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega_1$$

et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|\, dy < \infty$$

Alors, $F \in L_1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 1.9 (Fubini). *Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.*
On suppose que $F \in L_1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L_1^y(\Omega_2) \quad et \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L_1^x(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L_1^x(\Omega_1) \quad et \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dy \in L_1^y(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Exemple 1.8.
On note $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$, on veut calculer l'intégrale

$$\int_\Delta \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy.$$

Alors, On observe que la fonction $(x,y) \longmapsto \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}$ est continue et positive sur Δ. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \{y \in \mathbb{R}/(x,y) \in \Delta\} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} [\sqrt{1-x^2}, 1] & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ \emptyset & \text{sinon} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini 1.9, on a

$$\begin{aligned} \int_\Delta \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{-x}{2(1+x^2+y^2)} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-x}{2(2+x^2)} + \frac{x}{4} \right) dx = \left[-\frac{1}{4} \ln(2+x^2) + \frac{x^2}{8} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} \ln(3) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln(2) = \frac{\ln(2) - \ln(3)}{4} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Exemple 1.9. On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}.$$

On a

$$\int_0^1 \int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{y}(e^{-2xy} - e^{xy}) \right]_0^{+\infty} dy = \int_0^1 0dy = 0.$$

D'autre part

$$\int_0^{+\infty} \int_0^1 f(x,y)dydx = \int_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{x}(e^{-2xy} - e^{xy}) \right]_0^1 dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx \neq 0.$$

Alors, on remarque que $\int_0^1 \int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy \neq \int_0^{+\infty} \int_0^1 f(x,y)dydx$, ce qui veut dire qu'on ne peut appliquer le théorème de Fubini, et donc f n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[\times]0,1[$.

1.2 Définition et propriétés élémentaires des espaces L_p

Dans la suite, Ω sera un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesque dx.

Définition 1.2. — Soit $1 \leq p < +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$), l'espace $L_p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que $\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty$. Et, on note

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

— $L_\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C$ p.p. sur Ω. On note

$$\|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

Remarque 1.2. Si $f \in L_\infty$ alors $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ p.p. sur Ω.

La remarque ci-dessus nous implique que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

Exemple 1.10.

— Si f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$. On a $f \notin L_1(]0,1])$.

— Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$$

On a $f \in L_1(]0,1])$ mais $f \notin L_p(]0,1])$ pour $1 < p < +\infty$.

— Les fonctions indicatrices d'ensembles E mesurable de mesure finie sont dans L_p.

— Une fonction de $L_p (p < +\infty)$ n'est pas nécessairement bornée. Exemple

$$f(x) = \frac{1}{x^q} \mathbb{I}_{]0,1[}.$$

— Toute fonction f, continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$ est de L_∞.

Définition 1.3. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on dit que q est l'exposant conjugué de p si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

L'exposant conjugué de 1 est ∞.

Lemme 1.10 (Inégalité de Young)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors,*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \qquad \forall a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

Démonstration. On sait que la fonction ln est concave, donc

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln(ab),$$

alors, le résultat. □

Proposition 1.11 (Inégalité de Hölder)**.**
Soient $f \in L_p$ et $g \in L_q$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, $fg \in L_1$ et

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration. Les cas $p = 1$ ou $p = \infty$. Supposons que $p = 1$, donc $f \in L_1$ et $g \in L_\infty$; alors

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f|\, dx = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Les cas $1 < p < \infty$. D'après le lemme 1.10 on a

$$|fg| \leq \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q, \qquad \text{P.P } x \in \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1$.

— Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ l'inégalité est vérifiée.
— Si $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. On a alors

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

— Si $\|f\|_p > 1$ et $\|g\|_q > 1$. Alors on pose

$$F = \frac{f}{\|f\|_p} \quad \text{et} \quad G = \frac{g}{\|g\|_q} \qquad \text{donc } \|F\|_p = 1 \text{ et } \|G\|_q = 1.$$

Alors d'après le cas précédent on a

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \|FG\|_1 \leq 1 \Rightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Remarque 1.3. Le cas particulier où $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder, donne l'inégalité de *Cauchy-Schwarz.*

Remarque 1.4. Soient $f_1, f_2, \cdots, f_k$ des fonctions telles que $f_i \in L_{p_i}(\Omega)$ avec $1 \leq i \leq k$ et

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors, $f_1 f_2 \cdots f_k \in L_p(\Omega)$ et $\|f_1 f_2 \cdots f_k\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}$.

Remarque 1.5 (Inégalité d'interpolation). Si $f \in L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, alors $f \in L_r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \cdot \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ et $0 \leq \alpha \leq 1$.

En effet, suppposons $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ donc $1 = \frac{r\alpha}{p} + \frac{r(1-\alpha)}{q}$. Appliquons l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugés $\frac{p}{r\alpha}$ et $\frac{q}{r(1-\alpha)}$. Donc

$$\int |f|^r \, dx = \int |f|^{r\alpha} |f|^{r(1-\alpha)} \, dx \leq \left(\int |f|^{r\alpha \cdot \frac{p}{r\alpha}} \, dx \right)^{\frac{r\alpha}{p}} \left(\int |f|^{r(1-\alpha) \cdot \frac{q}{r(1-\alpha)}} \, dx \right)^{\frac{r(1-\alpha)}{q}}$$

ce qui done

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \cdot \|f\|_q^{1-\alpha}.$$

Proposition 1.12 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soient f et g de $L_p(\Omega)$, alors $f + g \in L_p(\Omega)$ et*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration. Les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ sont évidents. Pour $1 < p < +\infty$ on a

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p).$$

Donc $f + g \in L_p$. D'autre part et

$$\int |f + g|^p = \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int |f + g|^{p-1} |f| + \int |f + g|^{p-1} |g|,$$

en appliquant l'inégalité de Hölder on aura

$$\|f + g\|_p^p \leq \left(\int |f + g|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \left(\int |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int |f + g|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \left(\int |g|^p \right)^{1/p}.$$

Et puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a $p = q(p-1)$ et $q = \frac{p}{p-1}$, donc

$$\|f + g\|_p^p \leq \left(\int |f + g|^p \right)^{(p-1)/p} \left[\|f\|_p + \|g\|_p \right]$$

et par suite

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

Théorème 1.13. *$L_p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Démonstration. On applique la remarque 1.2 dans le cas $p = \infty$ et la proposition 1.12 dans le cas $1 \leq p < \infty$. □

Théorème 1.14 (Riesz-Fischer)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq +\infty$. L_p est un espace de Banach.*

Démonstration.

— Cas $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Alors pour tout $k \in N^*$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_k, \forall m \geq 0 : \|f_{n+m} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k},$$

par suite, il existe une ensemble $E_k \subset \Omega$ de mesure nulle telle que

$$\forall n \geq N_k, \forall m \geq 0, \forall x \in \Omega \setminus E_k : |f_{n+m}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k},$$

Ainsi, pour tout $x \in \Omega \setminus E$ telle que $E = \cup_k E_k$ négligeable, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge vers un réel $f(x)$. De plus, en faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \notin E, \forall n \geq N_k : |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

De fait, la fonction f ainsi définie, est dans L^∞, et pour tout $n \geq N_k$, on a $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$, ce qui signifie que f_n converge vers f.

— Cas $1 \leq p < +\infty$. Soit (f_n) une suite de cauchy dans $L^p(\Omega)$. Comme toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge, il nous suffit alors d'extraire de (f_n) une sous-suite convergente.
Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout n : $\left\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right\|_p \leq \frac{1}{2^n}$. On pose maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left|f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)\right|.$$

Alors $g_n \in L^p(\Omega)$ (somme de fonctions de L_p) et par l'inégalité de Minkowski 1.12 on obtient :

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \left\|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

ce qui implique que (g_n) est croissante et bornée en norme L^p, donc par le théorème de la convergence monotone 1.1, il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ presque partout. Ainsi, pour presque tout $x \in \Omega$ on a : pour tout $n \geq 2$ et pour tout $m \geq 0$

$$\begin{aligned}
\left|f_{\varphi(n+m)}(x) - f_{\varphi(n)}\right| &= \left|f_{\varphi(n+m)}(x) - \sum_{k=1}^{m-1} f_{\varphi(n+k)}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n)}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \left|f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n+k-1)}(x)\right| \\
&= g_{n+m}(x) - g_{n-1}(x) \leq g(x) - g_{n-1}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Alors la suite $(f_{\varphi(n)})$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel $f(x)$. Puisque pour presque tout $x \in \Omega$ on a $\left|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| \leq g(x)$ (pour $n \geq 2$), la fonction f est dans $L^p(\Omega)$.

Enfin, les $f_{\varphi(n)}$ sont dans $L^p(\Omega)$ et on a $\left|f_{\varphi(n)}(x)\right| \leq |f(x)| + |g(x)|$, mais $|f| + |g| \in L^p$, donc par convergence dominée on obtient $f_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$.

La suite (f_n) de Cauchy admet donc une valeur d'adhérence f dans L^p donc converge vers cette limite. cqfd

□

Théorème 1.15. *Soient (f_n) une suite de L_p et $f \in L_p$, tels que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) telle que*

a. $f_{n_k} \to f(x)$ *p.p. sur* Ω.

b. $|f_{n_k}| \leq h(x)$ *pour tout k et p.p. sur Ω, avec $h \in L_p$.*

Démonstration. Preuve presque analogue à la preuve du théorème précedent. □

Proposition 1.16. *Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Si Ω est de mesure finie i.e $|\Omega| < \infty$, alors $L^q(\Omega)$ s'injecte continuament dans $L^p(\Omega)$.*

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Démonstration. Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $r = \frac{q}{p}$ et $r' = \frac{q}{q-p}$. Alors

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{p\cdot\frac{q}{p}} \, dx\right)^{p/q} \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-p}} \, dx\right)^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_q^p \cdot |\Omega|^{\frac{q-p}{q}}$$

donc

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot |\Omega|^{\frac{q-p}{pq}} < \infty.$$

Par conséquent, $f \in L^p(\Omega)$. □

Remarque 1.6.

1. "S'injecte continuament" veut dire que l'application identité est continue de $L^q(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$.
2. Si la mesure de Ω n'est pas finie, les espaces L^p sont incomparables. C'est à dire

$$L^p(\Omega) \setminus L^q(\Omega) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad L^q(\Omega) \setminus L^p(\Omega) \neq \emptyset.$$

En effet, prenons dans $\mathbb{R}$ comme exemple les fonction $f_a(x) = x^{-a} 1\!\mathrm{I}_{]0,1]}(x)$ et $g_a(x) = x^{-a} 1\!\mathrm{I}_{[1,+\infty[}(x)$. Si $p < q$ et que $\frac{1}{q} < a < \frac{1}{p}$ alors $f_a \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$ et $g_a \in L^q(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$.

1.2.1 Cas particulier - Espaces ℓ_p

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, on note

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} \qquad \text{si } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\text{et} \qquad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \quad \text{si } p = +\infty.$$

On définit alors l'espace ℓ_p comme l'ensemble des suites u pour lesquelles la quantité $\|u\|_p$ est finie, et ℓ_∞ l'ensemble des suites bornées.

On a également les inégalités de Hölder et de Minkowski données par
Pour $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit $(u_n) \in \ell_p$ et $(v_n) \in \ell_q$, alors

$$\sum_{n \geq 0} |u_n v_n| \leq \left(\sum_{n \geq 0} |u_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n \geq 0} |v_n|^q \right)^{1/q}.$$

Et pour (u_n) et (v_n) de ℓ_p avec $1 \leq p \leq \infty$ on a

$$\|u_n + v_n\|_p \leq \|u_n\|_p + \|v_n\|_p.$$

Proposition 1.17. *Pour $1 \leq p \leq \infty$. Les espaces ℓ_p sont des espaces vectoriels normés complets.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.18 (Relation entre espaces ℓ_p)**.** *Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Alors on a*

$$\ell_p \subset \ell_q.$$

Démonstration. Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Montrons que $\ell_p \subset \ell_q$. Soit (u_n) une suite de ℓ_p, alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p < +\infty,$$

il existe donc un entier N, tel que pour tout $n \geq N$: $|u_n|^p < 1$. Ce qui nous donne que (u_n) est bornée, donc elle est dans ℓ_∞, et $\|u_n\|_\infty \leq \{u_0, u_1, \cdots, u_N, 1\}$.
De plus, pour $n \geq N$: $|u_n|^q \leq |u_n|^p$ et

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n|^q \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n|^p \leq \|u_n\|_p^p < \infty,$$

ce qui implique que $\|u_n\|^q < \infty$, d'où le résultat.
On peut en déduire que pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$ on a $\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset \ell_\infty$. □

Remarque 1.7. L'inclusion précédente peut-être stricte. Par exemple si nous prenons la suite constante $u_n = 1$ elle appartient à ℓ_∞, mais pas dans aucun ℓ_p $(p < \infty)$. Et si on prend la suite $u_n = \frac{1}{n^a}$ avec $a \geq 0$, elle appartient à ℓ_p si $ap \geq 2$ c'est à dire $a \geq \frac{2}{p}$. Donc soit $1 < p \leq q < \infty$, pour $\frac{1}{q} < a < \frac{1}{p}$ on a (u_n) est dans ℓ_q mais pas dans ℓ_p.

1.3 Réflexivité, Séparabilité, Dual de L_p

1.3.1 Espace réflexif

Soit E un espace vectoriel normé. Le dual E' de E est l'espace des formes linéaires continues sur E.
On note E'' les dual de E' et on l'appelle le bidual de E.
Pour tout $x \in E$, on définit une forme linéaire ϕ_x sur E', par $\phi_x(f) = f(x)$. Comme

$$|\phi_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \|f\|,$$

ainsi ϕ_x est un élément de E''.

Proposition 1.19. *Soit E un espace vectoriel normé. Alors, E est isométriquement isomorphe à un sous-espace de son bidual E'', plus précisement l'application $J_E : E \longrightarrow E''$ définie par $J_E(x)(\phi) = \phi(x)$ est une isométrie linéaire.*
L'isométrie $J_E : E \mapsto J(E) \subset E''$ est appelée l'injection canonique de E dans E''.

Démonstration. Il est clair que l'application J_E est linéaire. Elle est continue car, $\|J_E(x)\| = \|\phi_x\| \leq \|x\|$. Reste à prouver que J_E est une isométrie. Pour tout $x \in E$, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\|$ et $\|f\| = 1$ (Hahn-Banach). D'où

$$\|J_E(x)\| = \|\phi_x\| = \sup_{\|f\|=1} |\phi_x(f)| \geq |\phi_x(f)| = |f(x)| = \|x\|.$$

ainsi $\|J_E(x)\| = \|x\|$. □

Définition 1.4. Un espace normé E est dit réflexif si $J(E) = E''$ (c'est à dire J est surjective). Dans un tel cas, on identifie implicitement E avec son bidual E''.

Remarque 1.8.
1. Si E est réflexif, alors E est isométriquement isomorphe à E'' (la réciproque est généralement fausse).
2. Tout espace de dimension finie est réflexif.
   En effet l'espace et son dual (qui coïncide avec le dual topologique puisque toute application linéaire est continue) ont la même dimension, et sont donc en bijection l'un avec l'autre, et par conséquent aussi avec le bidual.
3. Tout espace réflexif est de Banach et sont dual est réflexif. Puisqu'il est isomorphe à son bidual qui est complet.
4. Si E est réflxif, alors la boule unité fermée $\overline{B}_E$ de E est faiblement compacte.

Proposition 1.20.
— *L'espace L^p est réflexif pour $1 < p < +\infty$.*
— *L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs.*

Démonstration. On peut voir la démonstration dans [1, 2]. □

1.3.2 Espace séparable

Définition 1.5. Un espace normé E est dit séparable, s'il contient une partie $F \subset E$ dénombrable et dense.

Proposition 1.21. *L'espace L^p est séparable pour $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de fonctions caractéristiques de pavés de la forme $\prod_{i=1}^{n}]x_i, y_i[$ inclus dans Ω avec x_i, y_i à coordonnées rationnelle. Par construction $\mathscr{E}$ est dénombrable, il nous suffit alors de montrer que $\mathscr{E}$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, on choisis $f_1 \in C_c(\Omega)$ telle que $\|f - f_1\|_p \leq \varepsilon/2$. Soit ω un ouvert borné contenant suppf_1. Comme $f_1 \in C_c(\omega)$ on peut construire une fonction $f_2 \in \mathscr{E}$ telle que supp$f_2 \subset \omega$ et que $|f_1 - f_2| \leq \frac{\varepsilon}{|w|^{1/p}}$ p.p. sur ω, on commence par recouvrir suppf_1 par un nombre fini de pavés de sorte que les variations de f_1 soient inférieur à $\frac{\varepsilon}{|w|^{1/p}}$. Il en résulte que $\|f_1 - f_2\|_p \leq \varepsilon$ et donc $\|f - f_2\|_p \leq 2\varepsilon$. □

Remarque 1.9. Tout espace de Hilbert est séparable et réflexif.

Corollaire 1.22. *Soit E un espace de Banach, alors E est réflexif et séparable si, et seulement si E' est réflexif et séparable.*

Corollaire 1.23.
— *Soit E un espace de Banach. Soit $K \subset E$ un sous ensemble convexe, fermé et borné. Alors, K est compact pour la topologie faibe. Donc de toute suite bornée dans K, on peut en extraire une sous suite qui converge faiblement dans K.*
— *Soit E un espace de Banach séparable et soit (f_n) une suite bornée dans E'. Alors, il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge faiblement dans E.*
— *Soit E un espace de Banach réflexif et soit (x_n) une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge faiblement dans E.*

1.3.3 Dualité

Les théorèmes suivants vont nous permettre d'identifier le dual topologique des espaces L^p, on se réfère à [1].

Théorème 1.24 (Représentation de Reisz)**.** *Soit $1 < p < +\infty$ et p' son exposant conjugué. Soit $\varphi \in (L^p)'$, alors il existe un unique $u \in L^{p'}$ tel que $\varphi = \mathscr{L}_u$, c'est à dire*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \qquad \forall f \in L^p.$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

Ce théorème est important, car il permet de représenter toute forme linéaire continue sur L^p ($1 < p < +\infty$) à l'aide d'une fonction de $L^{p'}$. L'application $\varphi \longmapsto u$ est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de L^p avec $L^{p'}$.

Théorème 1.25. *Soit $\varphi \in (L^1)'$. Alors il existe un unique $u \in L^\infty$ tel que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \qquad \forall f \in L^1.$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}.$$

Ce théorème nous a permet d'identifier le dual de L^1 à L^∞.

Remarque 1.10. En particulier, l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ est isomorphe à son dual topologique $(L^2(\Omega))'$. Pour toute forme linéaire continue $\varphi : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique $f \in L^2(\Omega)$ tel que $\varphi(g) = \int_\Omega fg = \langle f, g \rangle_{L^2}$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ est le produit scalaire de L^2.

1.4 Convolution et régularisation, Théorèmes de densité

Définition 1.6. Le produit de convolution de deux fonction f et g réelles ou complexes, est la fonction (si elle existe) qu'on note par $f * g$, définie par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Théorème 1.26. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in\in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.*
De plus,

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad et \quad \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Démonstration. — *Cas* $p = +\infty$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Ceci prouve que :
- La fonction $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable pour presque tout x.
- La fonction $x \longmapsto f(x-y)g(y)$ est bornée.
Donc $f * g \in L^\infty$ et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

— *Cas* $p = 1$. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\int |f(x-y)g(y)| \, dx = |g(y)| \int |f(x-y)| \, dx = \|f\|_1 |g(y)| < +\infty,$$

et

$$\int dy \int |f(x-y)g(y)| \, dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Le théorème de Tonelli nous assure que $(x,y) \longmapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.
Et d'après le théorème de Fubini on obtient

$$\int |f(x-y)g(y)| \, dy < +\infty \quad \text{p.p.} x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\int dx \int |f(x-y)g(y)| \, dy \leq \|f\|_1 \|g\|_1 . \quad i.e. \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

— *Cas* $1 < p < +\infty$. Soit q l'exposant conjugué de p, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé on a

$$\int |f(x-y)g(y)| \, dy = \int (|f(x-y)|^{1/q})(|f(x-y)|^{1/p} |g(y)|) dy.$$

Cette intégrale existe car : la fonction $|f(x-y)|^{1/p} |g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^n)$ et $|f(x-y)|^{1/q} \in L^q_y(\mathbb{R}^n)$ (du fait que $f \in L^1$ et $g \in L^p$). Donc l'inégalité de Hölder nous donne que $|f(x-y)g(y)| \in L^1_y$ et on a

$$\begin{aligned}
\int |f(x-y)g(y)| \, dy &\leq \left(\int |f(x-y)| \, dy \right)^{1/q} \left(\int |f(x-y)| \, |g(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \\
&\leq \|f\|_1^{1/q} \left(\int |f(x-y)| \, |g(y)|^p \, dy \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$|f * g|^p \leq (|f| * |g|^p)(x) \|f\|_1^{p/q}.$$

En appliquant le résultat lorsque $p = 1$ à $(|f| * |g|^p)$ on aura

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1 \|g\|_p^p \|f\|_1^{p/q}.$$

Par concéquent $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

□

Exemple 1.11. On considère la fontion porte définie par

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x|\leq \frac{1}{2} \\ 0 & \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Calculons le produit de convolution $f*f$. D'abord, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc le produit de convolution existe et appartient à $L^1(\mathbb{R})$. On a

$$(f*f)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)f(y)dy=\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x-y)\,\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x-y)dy$$

On remarque que $x-y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ce qui implique que $y\in[x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}]$, donc on distingue les cas suivants :

— Si $x-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$ ou $x+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}$ c'est à dire $x\geq 1$ ou $x\leq -1$, alors $f*f=0$.
— Si $x-\frac{1}{2}\leq-\frac{1}{2}$ ou $x+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$ alors $x=0$ et dans ce cas $f*f=1$
— Si $0\leq x\leq 1$ alors $f*f=-x+1$.
— Si $-1\leq x\leq 0$ alors $f*f=x+1$.

En récapitulant, on trouve $f*f(x)=(|x|+1)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}$.

Proposition 1.27 (Inégalité de Young)**.** *Soient $p,q\in[1,+\infty]$. Si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, alors f et g sont convolables sur $\mathbb{R}^n$, et on pour $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$,*

$$f*g\in L^r(\mathbb{R}^n) \quad \textit{de plus} \quad \|f*g\|_r\leq\|f\|_p\,\|g\|_q$$

Démonstration. Exercice □

Proposition 1.28 (Propriétés)**.** *1. Commutativité. $f*g=g*f$.*

2. Associativité. $f*(g*g)=(f*g)*h$.

3. Linéarité distributivité. $h*[\alpha f+\beta g]=\alpha(h*f)+\beta(h*g)$.

4. Compatible avec les translations. $(\tau_a f)*g=\tau_a(f*g)$ ($\tau_a f=f(x-a)$).

Proposition 1.29 (et définition du support)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction réelle définie sur Ω. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i\in I}$ de Ω tels que pour chaque $i\in I$; $f=0$ p.p. sur ω_i. On pose $\omega=\cup_{i\in I}\omega_i$. Alors $f=0$ p.p. sur ω et $\mathrm{supp}f=\Omega\setminus\omega$.*

Remarque 1.11. — Si f est une fonction continue sur Ω on retrouve la définition usuelle.
— Si f et g sont deux fonctions telles que $f=g$ p.p. sur Ω, Alors $\mathrm{supp}f=\mathrm{supp}g$ (on peut donc parler du support d'une fonction de L^p).

Proposition 1.30. *Soient $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors*

$$\mathrm{supp}(f*g)\subset\overline{\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g}.$$

Définition 1.7. Soit $1\leq p\leq+\infty$. on dit qu'une fonction $f\in L^p_{Loc}(\Omega)$ si $f\,\mathbb{1}_K\in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K\subset\Omega$.

Lemme 1.31. *Soit $f\in L^1_{Loc}(\Omega)$ tel que $\int fu=0$ pour tout $u\in C_c(\Omega)$. Alors*

$$f=0 \;\textit{p.p.} \;\; \textit{sur} \;\; \Omega.$$

Théorème 1.32 (Régularisation)**.** *Soient $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors $f*g\in C(\mathbb{R}^n)$.*

Proposition 1.33. *Soient $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ (k entier). Alors*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad et \quad D^\alpha(f*g) = (D^\alpha)f * g.$$

En particulier, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.12. Dans le cas d'une seule variable, si f et g sont deux fonctions de classe au moins C^1 et que f' et g' appartiennent à L^1 alors on a $(f*g)' = f\, astg'$.

Corollaire 1.34. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.*

1.5 Exercices 01

1.5.1 Enoncés

Exercice 1

1. Montrer que $I_n = \int_0^1 x^{1/n} dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la limite de $(I_n)_n$.
2. Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.
3. Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}}$.
4. Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t) e^{-nt} dt.$$
Déterminer la imite de I_n quand $n \to +\infty$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivalble et bornée sur $\mathbb{R}$. Après avoir montrer son existence, calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx$.
6. Donner le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt.$$

Correction [1001]

Exercice 2

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, avec $0 < a < 1 < b$ et $f(1) \neq 0$. soit f_n une suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1+x^n}.$$

1. Déterminer la limite simple de (f_n).
2. Ètablir l'égalité suivante :
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^1 f(t) dt.$$
3. Montrer que
$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt \sim \frac{\ln 2}{n} f(1).$$

Correction [1002]

Exercice 3

On pose pour $x \geq 0$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1-\cos t}{t^2} dt.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que f est deux fois dérivables sur $[0, +\infty[$ et calculer $f''(x)$.
3. En déduire la valeur de $f(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Correction [1003]

Exercice 4

1. Calculer $I = \iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dxdy$ telle que $D = \{(x,y)/0 \leq x \leq y\}$.
2. Montrer que l'on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini pour le calcul de

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy, \qquad \text{avec } D =]0,1]^2.$$

Correction [1004]

Exercice 5

1. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy$, et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.
2. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \cos(xy) dy$, et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$, pour tout $t > 0$.

Correction [1005]

1.5.2 Solutions

Correction de l'exercice 1

1. Soit $f_n(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est continue et positive sur $[0,1]$ c'est à dire intégrable et bornée. On a $\lim_n f_n(x) = \lim_n e^{\frac{1}{n}\ln x} = 1$, et $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, donc par le théorème de la convergence monotone on a $\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_n f_n(x)dx = 1$.
2. On a $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$. Soit $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. f_n est continue par morceau donc mesurable, et $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) = e^{-x}$. On a aussi pour tout $x \geq 0$, $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx < \infty$. Donc par le théorème de la convergence dominée on aura $\lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.
3. Soit $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}}$. Alors
   — f_n est continue sur $[0, +\infty[$ donc mesurable.
   — On a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ existe.

— Si $0 \leq x \leq 1$ on a $\lim_n f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et si $x > 1$ on a $\lim_n f_n(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$. D'après le T.C.D. on obtient

$$\lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$

4. On fait le chanagement de variable $u = nt$ donc $I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)e^{-u}du$.
   On a $|f(u/n)e^{-u}| \leq \|f\|_\infty e^{-u} = g(x)$ avec g intégrable. Donc par convergence dominée on obtient
   $$\lim_n I_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}du = f(0).$$
5. Soit $f_n(x) = e^{-nx}f(x)$. La fonction f est bornée, donc $|f_n(x)| \leq \|f\|_\infty e^{-nx}$, qui est intégrable. Et, on a
   f continue sur $[0, +\infty[$ donc mesurable, $f_n(x) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\rightarrow} f(x) = 0$.
   $$\forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq \|f\|_\infty e^{-x}, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \|f\|_\infty e^{-x}dx = \|f\|_\infty < \infty.$$
   Alors, d'après le TCD on a $\lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-nx}f(x)dx = 0$.
6. On $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$, une intégration par partie nous donne $f(x) = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$. On pose $h(x,t) = \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$. On applique le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre pour la fonction h, donc
   — h est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.
   — $|h(x,t)| \leq \frac{t}{(1+t^2)^2} = \varphi(t)$, On a φ continue sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^3}$ au voisinage de $+\infty$ qui est intégrable (Intégrale de Reimann) donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   — $(x,t) \to \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.
   — On a $\left|\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right| \leq \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$, donc dominée par une fonction continue et intégrable alors elle aussi est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   Ainsi, la fonction $x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Correction de l'exercice 2

1. On a
   $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [a, 1[\\ f(1)/2 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \in]1, b] \end{cases}$$
2. Remarquons que $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ et f intégrable sur $[a,b]$, donc d'après le TCD on obtient le résultat.
3. Par une intégration par partie on aura
   $$\int_a^1 t^{n-1}f_n(t)dt = \left[\frac{1}{n}\ln(1+t^n)f(t)\right]_a^1 - \frac{1}{n}\int_a^1 f'(t)\ln(1+t^n)dt,$$

$$\text{avec}\quad \left[\frac{1}{n}\ln(1+t^n)f(t)\right]_a^1 = \frac{\ln 2}{2}f(1)+\frac{\ln(1+a^n)}{n}f(a) \simeq \frac{\ln 2}{2}f(1).$$

car $\ln(1+a^n) \to 0$. D'autre part

$$\left|\frac{1}{\ln}(1+t^n)f'(t)\right| \leq \frac{1}{n}\left\|f'\right\|_\infty \int_0^1 t^n dt \overset{(\infty)}{\simeq} 0.$$

(Remarque $\ln(1+u) \leq u$). Donc on obtient le résultat voulu.

Correction de l'exercice 3

1. La fonction $h : t \longmapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et on a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}.$$

   Donc intégrable sur $]0,+\infty[$.
   La fonction $g : (x,t) \longmapsto e^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+\times]0,+\infty[$ et on $\left|e^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1-\cos t}{t^2}$, donc f est continue. Et on a

$$|f(x)| \leq \|h\|_\infty \int_0^x e^{-xt}dt = \frac{\|h\|_\infty}{x}.$$

   On en déduit que f tend vers 0 en $+\infty$.

2. Les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ existes et sont continues sur $\mathbb{R}_+^*\times]0,+\infty[$.
   Et on a $t \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$. Alors, soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[: \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 2^{-at} = k(t).$$

   La fonction k est iintégrable sur $]0,+\infty[$. Par domination sur tout segment, f est de classe C^2 et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-\cos t)dt = \frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

3. On a $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, puisque $f'(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $f(x) = x\ln x - x\ln\sqrt{1+x^2} - \arctan x + \frac{\pi}{2}$, puisque $f(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. par continuité, on obtient $f(0) = \pi/2$. Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}dt = \left[-\frac{2\sin^2(t/2)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

   donc $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ d'où $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4

1. La fonction $(x,y) \to \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$ est continue et positive sur D, donc mesurable, on peut donc appliquer le théorème de Fubini. Alors x varie de 0 à y avec y un réel positif.

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^y \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dx\right)dy = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\arctan x]_0^y dy.$$

Donc $I = [\frac{(\arctan y)^2}{2}]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$.

2. On pose $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ et on calcule les deux intégrales

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy \quad , \quad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)dx &= \int_0^1 \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}dx - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}\\ &= \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}dx - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}\\ &= -\frac{1}{1+y^2}\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy = \int_0^1 \frac{-dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

de la même façon on calcule l'autre intégrale et on trouvera

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ces résultats nous montre que le théorème de Fubini ne s'applique pas pour cette intégrale, car la fonction $f \notin L^1(]0,1]^2)$. En effet, en passant aux coordonées polaires on trouve

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta$$

Qui est divergente.

Correction de l'exercice 5

1. On a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dy &= \frac{1}{x^2-1}\int_0^\infty \frac{x^2-1}{(1+y)(1+x^2y)}dy\\ &= \frac{1}{x^2-1}\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}dy\\ &= \frac{1}{x^2-1}\left[\ln(1+x^2y)-\ln(1+y)\right]_0^{+\infty} = \frac{2\ln x}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y}\left(\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2y}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+y}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\arctan(\sqrt{y}x)\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} \frac{2du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{(en posant} u=\sqrt{y}).
\end{aligned}$$

2. On a $\int_0^1 \cos(xy)dy = \left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_0^1 = \frac{\sin x}{x}$.

   On pose $g(x,y) = \cos(xy)e^{-tx}$ pour $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$ et $t > 0$. On a $|g(x,y)| \leq e^{-tx}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ donc on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx &= \int_0^{\infty}\left(\int_0^1 g(x,y)dy\right) dx = \int_0^1\left(\int_0^{\infty} \cos(xy)e^{-tx}dx\right) dy \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{2}(e^{(iy-t)x} + e^{(-iy-t)x})dx\right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-iy} + \frac{1}{t+iy}\right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{t}{y^2+t^2} dy = \arctan\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

1.6 Exercice 2

1.6.1 Enoncés

Exercice 6

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de mesure finie $|\Omega| < +\infty$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f_n| \leq C$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\, dx = \int_\Omega f\, dx.$$

Correction [2001]

Exercice 7

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.

Correction [2002]

Exercice 8

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ est une suite croissante et
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$
2. Calculer la limite
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-bx} d\lambda(x)$$
où $b > 1$.

Correction [2003]

Exercice 9

Montrer que

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m dx = m!$ (pour tout $m \in \mathbf{N}$).
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1.$

Correction [2004]

Exercice 10

1. Soit $a, b \geq 0$ et soit $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *(on dit que p et q sont conjugués au sens de Young)*. Montrer l'inégalité de Young :
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
On pourra considérer la fonction $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$.

2. Soit de nouveau $p,q \in (1,+\infty)$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\lambda > 0$
$$\int_\Omega |fg|\,d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$
Optimiser cette inégalité par rapport à λ et montrer l'inégalité de Hölder :
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\,\|g\|_q.$$
Cette inégalité est-elle vraie pour $p=1$ et $q=+\infty$?
3. Soient p et p' dans $[1,+\infty[$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si f appartient à $L^p(\mu)\cap L^{p'}(\mu)$, alors f appartient à $L^r(\mu)$ pour tout r compris entre p et p'.
4. Montrer que si μ est une mesure finie alors
$$L^\infty(\mu) \subset \bigcap_{p\geq 1} L^p(\mu),$$
et, pour tout f,
$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$
5. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, alors $f\cdot g \in L^r(\mu)$ et
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Correction [2005]

Exercice 11

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p(x)\,dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f-g=0\ \mu-p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. En particulier, pour $1<q<2<p$, on a :
$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$
2. Soit $\mathscr{B}^n(0,1)$ la boule unité centrée en 0 de $\mathbb{R}^n$. En considérant les fonctions
$$f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$$
montrer que pour $q<p$, l'inclusion $L^p(\mathscr{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ est stricte.

Correction [2006]

Exercice 12

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞.

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. En particulier, pour $1<q<2<p$, on a :
$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$
2. En considérant les suites $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$, montrer que pour $q<p$, l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte.

Correction [2007]

1.6.2 Solutions 2

Correction de l'exercice 6

Puisque Ω est de mesure finie, la fonction constante égale à C est intégrable, et son intégrale est $C|\Omega|$. Une application directe du théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Correction de l'exercice 7

La fonction de Dirichlet restreint à l'intervalle $[a,b]$, $f(x) = \mathbf{1}_\mathbb{Q}\big|_{[a,b]}(x)$, est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue vaut 0. Mais elle n'est pas intégrable au sens de Riemann : $\underline{S}(f,\tau) = 0$ et $\overline{S}(f,\tau) = b-a$ pour toute subdivision τ de l'intervalle $[a,b]$.

Correction de l'exercice 8

1. Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $(1+\frac{x}{n})^n$ est une suite croissante et que $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{x^k}{k!},$$
où $\quad a_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$.

   Les assertions suivantes sont vraies :
   i) $a_{n+1,k}\geq a_{n,k}$. En effet, $\frac{n+1-l}{n+1}\geq\frac{n-l}{n}$ pour $l\in\mathbb{N}$ car $n^2+n-l\cdot n\geq n^2+n-l\cdot n-l$,
   ii) $a_{n,k}<1$ (évident) ;
   iii) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n,k}=1$.

   Comme $a_{n+1,n+1}>0$, $\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1}a_{n+1,k}\dfrac{x^k}{k!} > \sum\limits_{k=0}^{n}a_{n+1,k}\dfrac{x^k}{k!}$. Il s'ensuit donc de (i) que la suite $\left\{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right\}$ est croissante. Les assertions (ii) et (iii) impliquent que
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\frac{x^k}{k!}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$$
et que, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\geq\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{x^k}{k!}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

2. Par le théorème de convergence monotone, on a pour $b>1$,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}d\lambda(x) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}_+}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}d\lambda(x)\\ &= \textstyle\int_0^\infty e^{(1-b)x}d\lambda(x) = \frac{1}{b-1}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}.$$
En effet, comme $\ln y \leq y-1$ pour $y>0$, on a $\ln y^{-\frac{1}{n}} \leq y^{-\frac{1}{n}}-1$, c'est-à-dire $\left(1-\frac{\ln y}{n}\right)^n \leq y^{-1}$. Ainsi, en posant $x=\ln y$, il vient $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$. De plus,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right)},$$
où $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.
Posons $f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m \mathbf{1}_{[0,n]}$. Alors en utilisant le théorème de convergence dominée et sachant que $\Gamma(m+1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^m dx = m!$, on obtient le résultat.
2. Soit $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,n]}$. Comme la suite $\{f_n(x)\}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=e^{-x}$, on obtient le résultat en appliquant le théorème de convergence monotone.

Correction de l'exercice 10

1. Soit $a,b\geq 0$ et soit $p,q\in(1,+\infty)$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. La fonction $\theta\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définit par $\theta(a)=\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q-ab$ est dérivable et :
$$\theta'(a)=a^{p-1}-b.$$
Cette dérivée s'annule lorsque $a=b^{\frac{1}{p-1}}$, est négative pour $a<b^{\frac{1}{p-1}}$ et positive pour $a>b^{\frac{1}{p-1}}$. On a
$$\theta(b^{\frac{1}{p-1}})=\frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{q}b^q-b^{1+\frac{1}{p-1}}=0.$$
Ainsi $\theta(a)\geq 0$, i.e.
$$ab\leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$
2. Soit $f\in L^p(\mu)$ et $g\in L^q(\mu)$. D'après la question précédente, pour tout $\lambda>0$ et pour μ-presque tout x :
$$|fg|(x)=|\lambda f(x)\cdot\frac{g(x)}{\lambda}|\leq\frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p+\frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q.$$
Ainsi
$$\int_\Omega |fg|\,d\mu\leq\frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega|f|^p\,d\mu+\frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega|g|^q\,d\mu.$$
Posons
$$\Phi(\lambda)=\frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega|f|^p\,d\mu+\frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega|g|^q\,d\mu.$$
La fonction Φ est dérivable et :
$$\Phi'(\lambda)=\lambda^{p-1}\|f\|_p^p-\lambda^{-q-1}\|g\|_q^q.$$

Cette dérivée s'annule pour $\lambda_1 := \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$, est négative pour $\lambda \leq \lambda_1$ et positive pour $\lambda \geq \lambda_1$. Ainsi le minimum de Φ vaut :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_1) &= \frac{1}{p}\left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{p}{p+q}}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{-\frac{q}{p+q}}\|g\|_q^q \\ &= \frac{1}{p}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} + \frac{1}{q}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} = \|f\|_p\,\|g\|_q.\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité de Hölder :

$$\|f\,g\|_1 \leq \|f\|_p\,\|g\|_q.$$

Si $f \in L^1(\mu)$ et $g \in L^\infty(\mu)$, alors $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ pour presque tout $x \in \Omega$ et

$$\int_\Omega |fg|\,d\mu \leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f|\,d\mu,$$

i.e. $\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.

3. Soient $p, p' \in [1, +\infty)$. On suppose $p < p'$. Soit $p < r < p'$. On a

$$|f|^r = |f|^r \mathbf{1}_{|f|>1} + |f|^r \mathbf{1}_{|f|<1} \;\leq\; |f|^{p'}\mathbf{1}_{|f|>1} + |f|^p \mathbf{1}_{|f|<1}.$$

On en déduit que

$$\int_\Omega |f|^r\,d\mu \;\leq\; \int_\Omega |f|^{p'}\,d\mu + \int_\Omega |f|^p\,d\mu \;< +\infty,$$

donc f appartient à $L^r(\mu)$.

4. Supposons que μ soit une mesure finie et soit $f \in L^\infty(\mu)$. Alors

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Ainsi pour tout p

$$\int_\Omega |f|^p\,d\mu \;\leq\; \|f\|_\infty^p \int_\Omega 1\,d\mu \;=\; \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) \;<\; +\infty,$$

ce qui implique que $f \in L^p(\mu)$. En particulier, f appartient à l'intersection $\bigcap_{p\geq 1} L^p(\mu)$. De plus, pour tout p, on a :

$$\|f\|_p \;\leq\; \|f\|_\infty\,\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui implique que

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \;\leq\; \|f\|_\infty.$$

D'autre part, pour tout $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, on a

$$\int_\Omega |f|^p\,d\mu \;\geq\; \int_{|f|>(\|f\|_\infty - \varepsilon)} |f|^p\,d\mu \;\geq\; (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p\,\mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\Big).$$

Ainsi pour tout p, il vient

$$\|f\|_p \;\geq\; (\|f\|_\infty - \varepsilon)\,\mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque $\lim_{p\to+\infty}\mu\left(|f| > (\|f\|_\infty-\varepsilon)\right)^{\frac{1}{p}} = 1$, il en découle que

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p \geq \|f\|_\infty,$$

donc finalement $\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$.

5. Posons $f_1 := f^r$ et $g_1 := g^r$. On a $f_1 \in L^{\frac{p}{r}}(\mu)$ et $g_1 \in L^{\frac{q}{r}}(\mu)$. Notons que l'identité $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ entraîne que $\frac{p}{r},\frac{q}{r} > 1$ et que les nombres $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ sont conjugués au sens de Young. Par l'inégalité de Hölder on a donc

$$\int_\Omega (fg)^r d\mu = \int_\Omega f_1 g_1\, d\mu \leq \left(\int_\Omega f_1^{\frac{p}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega g_1^{\frac{q}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{q}} = \left(\int_\Omega f^p d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega g^q d\mu\right)^{\frac{r}{q}}.$$

D'où, finalement,

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Correction de l'exercice 11

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, notons $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f-g = 0\ \mu-p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p(x)\,dx \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$

ainsi $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ pour tout p et $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$. Montrons que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$, on a par exemple :

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx &= \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^q(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} |f|^q(x)\,dx \\ &\leq \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} 1\,dx \\ &\leq \|f\|_p^p + \mu(\Omega) < +\infty.\end{aligned}$$

Ou encore, en utilisant l'inégalité de Hölder pour les réels conjugués $r = \frac{p}{q} > 1$ et $r' = \frac{p}{p-q}$:

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx &= \left(\int_\Omega |f|^{q\cdot\frac{p}{q}}(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}}(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\ &= \|f\|_p^q\,\mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}},\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{qp}}.$$

En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$:

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

2. Montrons que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathscr{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ est stricte. La fonction f_α appartient à $L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$ si et seulement $\alpha \leq 0$, et à $L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$ avec $p < +\infty$ si et seulement si
$$p\alpha - n + 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p}$$
Soit $1 \leq q < p$, alors $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ appartient à $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$. En particulier, $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ appartient à $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$.

Correction de l'exercice 12

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞.

1. Montrons que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Comme
$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty,$$
il existe un rang N tel que pour $n > N$, $|u_n|^q < 1$. En particulier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^∞ et
$$\|u\|_\infty \leq \max\{u_0, \ldots, u_N, 1\}.$$
De plus, pour $n > N$, on a $|u_n|^p \leq |u_n|^q$ et
$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^p \leq \sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^q \leq \|u\|_q^q < +\infty,$$
ce qui implique que $\|u\|_p < +\infty$. En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$, on a :
$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$

2. La suite $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$ appartient à ℓ^∞ pour tout $\alpha \geq 0$ et à ℓ^p avec $1 \leq p < +\infty$ si et seulement si $\alpha p > 1$, i.e $\alpha > \frac{1}{p}$. En particulier la suite constante égale à 1 appartient à ℓ^∞ mais n'appartient à aucun ℓ^p pour $p < +\infty$. Soit $1 < q < p < +\infty$. Pour tout α tel que $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$, la suite $u^{(\alpha)}$ appartient à $\ell^p \setminus \ell^q$. C'est le cas en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$. Ainsi l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte lorsque $q < p$.

Bibliographie

[1] H. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications*, MASSON, 1983.

[2] H. BREZIS, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, NY, 2011.

[3] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris, 1998.

[4] M. WILLEM, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, Paris, 2003.