TD 02 + : Ajustement de la loi normale

Exercice :

L'enregistrement dans une station pluviométrique a donné les valeurs des pluies suivantes :

Année	Pluie (mm)	Année	Pluie (mm)
1970	588.9	1990	638.6
1971	706.3	1991	623.7
1972	791.2	1992	680.6
1973	391.7	1993	500
1974	418.1	1994	585.5
1975	597.6	1995	734.6
1976	705.1	1996	391.8
1977	555.5	1997	863
1978	654.5	1998	735
1979	464.1	1999	562.1
1980	577.6	2000	547.1
1981	585.1	2001	368.2
1982	567.1	2002	973
1983	715.9	2003	858.9
1984	833.4	2004	842.9
1985	448.4	2005	574.2
1986	813.6	2006	594
1987	382.1	2007	528.4
1988	480.1	2008	888.5
1989	530.9	2009	694.6

Calculer pour la série suivante :

1. La moyenne, l'écart-type et le coefficient de variation ;
2. Ajuster à l'échantillon la loi normale, dessiner le nuage de points et tracer la droite d'henry. Qu'est-ce que vous remarquez ?
3. Vérifier l'ajustement à l'aide du test de Kolmogorov-Smirnov, avec $\alpha = 0.02$;
4. Calculer l'intervalle de confiance à 90 % $(\alpha = 10\%)$, de la moyenne et l'écart-type ;
5. Estimer la pluie centennale et son intervalle de confiance à 80 % $(\alpha = 20\%)$.

1. Calcul de la moyenne, l'écart-type et le coefficient de variation :

$\bar{P} = \frac{\sum P_i}{N}$ ➔ $\bar{P} = 24991.9/40$ ➔ $\bar{P} = 624.80\ mm$

$S = \sqrt{\frac{\sum(pi^2) - N\bar{P}^2}{N-1}}$ ➔ S = 154.26 mm

Cv = S/$\bar{P}$ ➔ Cv = 0.25

2. Ajustement de la loi Normale sur notre échantillon :

ordre ***n_i***	***pluies classées***	***FND*** = (n-0.5)/N	***variables réduites Z*** ***Z= (P-$\bar{P}$)/S***	***fréquences théoriques***	***différences absolues***
1	368.2	0.0125	-1.66	0.0485	0.036
2	382.1	0.0375	-1.57	0.0582	0.0207
3	391.7	0.0625	-1.51	0.0655	0.003
4	391.8	0.0875	-1.51	0.0655	0.022
5	418.1	0.1125	-1.34	0.0901	0.0224
6	448.4	0.1375	-1.14	0.1271	0.0104
7	464.1	0.1625	-1.04	0.1492	0.0133
8	480.1	0.1875	-0.94	0.1736	0.0139
9	500	0.2125	-0.81	0.209	0.0035
10	528.4	0.2375	-0.62	0.2676	0.0301
11	530.9	0.2625	-0.61	0.2709	0.0084
12	547.1	0.2875	-0.50	0.5	**0.2125**
13	555.5	0.3125	-0.45	0.3264	0.0139
14	562.1	0.3375	-0.41	0.3409	0.0034
15	567.1	0.3625	-0.37	0.3557	0.0068
16	574.2	0.3875	-0.33	0.3707	0.0168
17	577.6	0.4125	-0.31	0.3783	0.0342
18	585.1	0.4375	-0.26	0.3974	0.0401
19	585.5	0.4625	-0.25	0.4013	0.0612
20	588.9	0.4875	-0.23	0.409	0.0785
21	594	0.5125	-0.20	0.4207	0.0918
22	597.6	0.5375	-0.18	0.4286	0.1089
23	623.7	0.5625	-0.01	0.496	0.0665
24	638.6	0.5875	0.09	0.5359	0.0516
25	654.5	0.6125	0.19	0.5753	0.0372
26	680.6	0.6375	0.36	0.6406	0.0031
27	694.6	0.6625	0.45	0.6736	0.0111
28	705.1	0.6875	0.52	0.6985	0.011
29	706.3	0.7125	0.53	0.7019	0.0106
30	715.9	0.7375	0.59	0.7224	0.0151
31	734.6	0.7625	0.71	0.7611	0.0014
32	735	0.7875	0.71	0.7611	0.0264

33	791.2	0.8125	1.08	0.8599	0.0474
34	813.6	0.8375	1.22	0.8888	0.0513
35	833.4	0.8625	1.35	0.9115	0.049
36	842.9	0.8875	1.41	0.9207	0.0332
37	858.9	0.9125	1.52	0.9357	0.0232
38	863	0.9375	1.54	0.9382	0.0007
39	888.5	0.9625	1.71	0.9564	0.0061
40	973	0.9875	2.26	0.9881	0.0006

3. **Vérification de l'ajustement à l'aide du test de Kolmogorov-Smirnov, pour α = 0.02 :**

Dmax =0.2125
dn= 0.2349

Dmax < d (n) donc on accepte qu'une loi normale dont la moyenne est 624.80 mm et sont écart type 154.26 mm s'ajuste à notre échantillon avec un risque de 2%.

4. **l'intervalle de confiance à 90 % (α=10%), de la moyenne et l'écart-type :**

De la moyenne :

$\bar{p}$ = 624.80; S = 154.26, N = 40, α = 10%.

$Z_{\frac{1-\alpha}{2}} = \frac{2-\alpha}{2} \rightarrow \frac{2-0.1}{2} \rightarrow 0.950 \Rightarrow \boxed{Z_{0.950} = 1.64}$

$\bar{p} - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{p} + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{N}}$

$624.80 - 1.64 \frac{154.26}{\sqrt{40}} < \mu < 624.80 + 1.64 \frac{154.26}{\sqrt{40}} \rightarrow \boxed{584.78 < \mu < 664.82}$

De l'écart-type :

S = 154.26, N = 40, α = 10%.

$Z_{\frac{1-\alpha}{2}} = \frac{2-\alpha}{2} \rightarrow \frac{2-0.1}{2} \rightarrow 0.950 \Rightarrow \boxed{Z_{0.950} = 1.64}$

$s - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{2N}} < \sigma < s + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{2N}}$

$154.26 - 1.64 \frac{154.26}{\sqrt{2*40}} < \sigma < 154.26 + 1.64 \frac{154.26}{\sqrt{2*40}} \rightarrow \boxed{125.95 < \sigma < 182.54}$

5. Estimation de la pluie centennale et son intervalle de confiance à 80 % (α=20%).

$\bar{p}$ = 624.80; S = 154.26, N = 40, α = 20%.

$Z_{\frac{1-\alpha}{2}} = \frac{2-\alpha}{2} \rightarrow \frac{2-0.2}{2} \rightarrow 0.90 \Rightarrow \boxed{Z_{0.90} = 1.29}$

On commence par l'estimation de la pluie centennale

$FD = \frac{1}{T} \Rightarrow FD = \frac{1}{100} \Rightarrow FD = 0.01 \Rightarrow FND = 1 - FD \Rightarrow FND = 1 - 0.01 \Rightarrow FND = 0.99$ à partir du tableau Z = 2.33.

$p = \bar{p} + sz \Rightarrow P_{100} = 624.80 + 2.33 * 154.26 \Rightarrow \boxed{P_{100} = 984.23 \text{ mm}}$

$$x_p - z_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{2N}} \sqrt{2 + z_p^2} < x_p < x_p + z_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{2N}} \sqrt{2 + z_p^2}$$

$$984.23 - 1.29 \frac{154.26}{\sqrt{2 * 40}} \sqrt{2 + (2.33)^2} < x_p < 984.23 + 1.29 \frac{154.26}{\sqrt{2 * 40}} \sqrt{2 + (2.33)^2}$$

$$\boxed{923.59 < x_p < 1044.87}$$