CHAPITRE III: DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS:

Introduction :

L'hydrodynamique des liquides consiste à étudier le mouvement des particules liquides soumises à un système de forces. Dans l'hydrodynamique les forces de compressibilité sont négligées. Si les forces dues à la viscosité ne manifestent pas (Force de frottement = 0), il n'y a pas donc de mouvement relatif entre les particules de liquides, on parle alors de *l'hydrodynamique des liquides parfaits.*

III.1 Equation de la dynamique des fluides parfaits (Equation d'Euler) :

En hydrostatique, nous avons établi les équations d'équilibre d'un parallélépipède élémentaire pris dans une masse liquide au repos c à d soumis à l'action des :

1. Forces extérieures (forces de volumes)
2. Pressions latérales (forces de surfaces)

En considérant la force extérieure $\vec{F}$ de composantes, X, Y, Z agissant sur l'unité de masse du liquide, l'équation d'équilibre de l'hydrostatique (chapitre I).

$$\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\,P = \vec{F}$$

En hydrodynamique, il suffit d'ajouter au second membre, la force d'inertie par l'unité de masse, c à d au signe prés, l'accélération absolue soit $-\vec{a}$, ce qui conduit à l'équation fondamentale.

$$\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\,P = \vec{F} - \vec{a} \quad \text{………………III.1}$$

Cette équation vectorielle projetée sur les trois axes fournis les trois équations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = X - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = Y - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = Z - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \quad \text{……………………III.2}$$

Le système III.2 peut s'écrire encore sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = X - \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = Y - \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = Z - \frac{d^2z}{dt^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Ce sont les équations générales du mouvement appelées équations d'Euler

Multiplions la première équation par *dx*, la deuxième par *dy*, la troisième par *dz* et additionnons, on obtient:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right.}=Xdx+Ydy+Zdz-\underbrace{\left(\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz\right)}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(dP-\frac{\partial P}{\partial t}\partial t\right)=Xdx+Ydy+Zdz-(udu+vdv+wdw)$$

Et on a $V=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ donc, $Vdv=udu+vdv+wdw$

En définitive l'équation s'écrit

$$\frac{1}{\rho}(dP-\frac{\partial P}{\partial t}\partial t)=Xdx+Ydy+Zdz-Vdv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{III.3}$$

Pour un régime permanant: $\frac{\partial P}{\partial t}=0$ donc l'équation prend la forme suivante:

$$\frac{1}{\rho}dP=Xdx+Ydy+Zdz-Vdv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{III.4}$$

III.2 Equation de Bernoulli:

Soit l'écoulement permanant d'un liquide parfait et incompressible soumis au champ gravitationnel (champ de pesanteur); le long d'une ligne de courant confondue avec la trajectoire. (Écoulement unidimensionnel) X = Y = 0, Z = -g.

Remplacer dans l'équation (III.4) on obtient

$$\frac{1}{\rho}dP=-gdz-Vdv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{III.5}$$

Après intégration l'équation (III.5) s'écrit ainsi:

$\frac{P}{\rho}=-gz-\frac{V^2}{2}$ $\Rightarrow$ On divise par g on obtient $\Rightarrow$ $\frac{P}{\rho g}+z+\frac{V^2}{2g}=Cte$

$$z+\frac{P}{\varpi}+\frac{V^2}{2g}=H=Cte \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{III.6} \qquad \text{Equation de Bernoulli.}$$

Cette équation est homologue à celle obtenue en hydrostatique (I.4) sauf le terme $\frac{V^2}{2g}$ est plus, qui représente la hauteur de la vitesse (m).

- L'équation de Bernoulli est valable en tout point du fluide incompressible en mouvement permanant et irrotationnel.

- Selon Bernoulli la somme des thermes reste constante le long d'une ligne de courant. Cette somme reste la même pour toutes les lignes de courant à conditions que l'écoulement soit permanant et irrotationnel.

III.2.1 *Représentation graphique:*

$$Z+\frac{P}{\varpi}+\frac{V^2}{2g}=H=C$$

Z: côte du point (m).

$\frac{P}{\varpi}$: Hauteur due à la pression (m).

$\frac{V^2}{2g}$: Hauteur due à la vitesse (m).

H: charge totale (m).

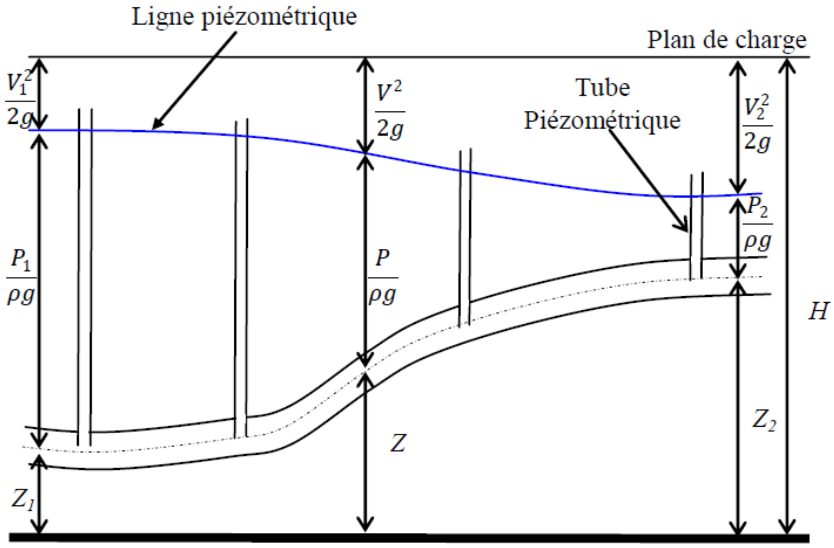

Fig. III.1 : Représentation graphique de l'équation de Bernoulli pour un liquide parfait.

Dans le cas d'un liquide de fluidité parfaite la ligne de charge est confondue avec le plan de charge.

La ligne piézométrique relie touts les niveaux dans les tubes piézométriques.

La charge entre deux points d'un filet liquide est la différence de côte de la ligne piézométrique entre ces deux points, soit:

$$h=(Z_1+\frac{P_1}{\varpi})-(Z_2+\frac{P_2}{\varpi})$$

Si la fluidité est parfaite: $h=\frac{V_1^2}{2g}-\frac{V_2^2}{2g}$

III.2.2 *Application du théorème de Bernoulli:*

- Tube de Pito:

On considère un liquide en écoulement permanant dans une canalisation, et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B, le liquide à la même vitesse V qui dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide $P_B = P$

En A, point d'arrêt, V = 0 et $P = P_A$

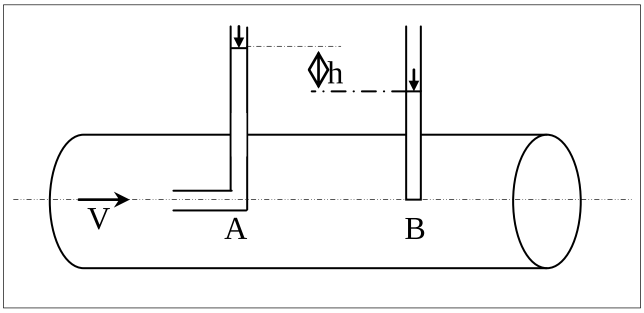

Fig. III.2 : Tube de Pito.

D'après le théorème de Bernoulli :

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{P_A}{\rho g} = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \Rightarrow P_A = P + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 = P_A - P \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 = \rho g h$$

$$\Rightarrow h = \frac{V^2}{2g}$$

Donc d'après la Fig. (III.2) la différence de niveau h c'est la hauteur due à la vitesse V.

Les vitesses totales sont déterminées à l'aide du tube de Pito suivant la formule suivante:

$$V = k\sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{III.7}$$

Où k c'est un coefficient de correction déterminé expérimentalement.

- Tube de Venturi " Phénomène de Venturi"

Une conduite de section principale S_A, subit un étranglement en B ou sa section S_B.

La vitesse d'un fluide augmente dans l'étranglement donc sa pression se diminue.

$$V_B > V_A \Rightarrow P_B < P_A.$$

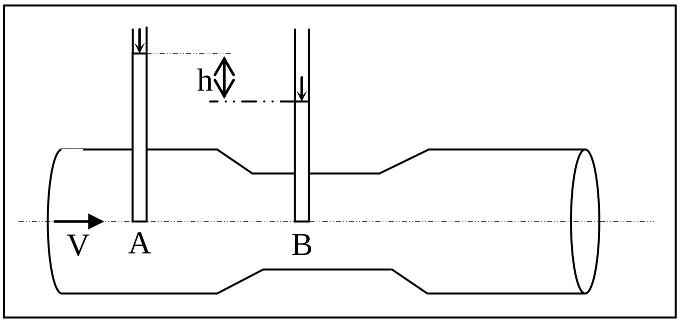

Fig. III.3 : Tube de Venturi

Le théorème de Bernoulli s'écrit ici:

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A{}^2}{2g} = Z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B{}^2}{2g}$$

Et on a $Q = V_A S_A = V_B S_B$

$$\Rightarrow P_A - P_B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right)Q^2 \Rightarrow P_A - P_B = kQ^2 \quad \text{……………..III.8}$$

La différence de pression aux extrémités du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit Q.