CHAPITRE II : CINÉMATIQUE DES FLUIDES

II.1 Introduction:

La cinématique du liquide c'est l'étude du mouvement des liquides sans tenir compte des forces qui lui donnent naissance. On considère donc seulement les relations entre les positions des particules liquides et le temps.

II. 2 Mouvement d'un liquide:

Pour étudier le mouvement d'un liquide quelconque, on peut utiliser deux méthodes:

II.2.1 *La méthode de Lagrange:*

Cette méthode consiste d'une manière générale d'analyser le mouvement d'un liquide pourra consister à accompagner le mouvement d'une particule individualisée.

On appelle trajectoire de la particule le lieu géométrique des positions successives occupées par la particule au cours du temps.

Soit la trajectoire M_0M (Fig. II.1) sur laquelle passe une particule d'un liquide déterminé par les coordonnées initiales de temps t_0 et de la position initiale du point considéré.

$$M = \begin{cases} x = f(x_0, y_0, z_0) \\ y = \rho\ (x_0, y_0, z_0) \\ z = \psi\ (x_0, y_0, z_0) \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.1}$$

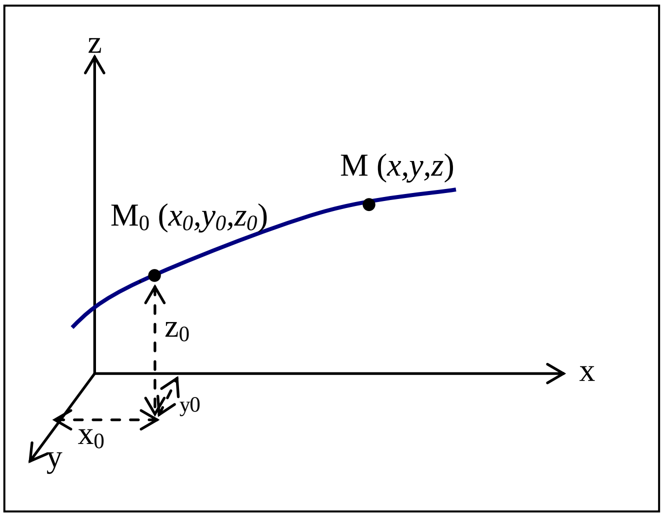

Fig. (II.1)

x, y et z sont les variables de Lagrange.

- Les composantes de la vitesse : $\vec{V}$ (V_x, V_y, V_z)

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d[\,f(x_0,y_0,z_0,t)]}{dt} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d[\rho(x_0,y_0,z_0,t)]}{dt} \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d[\varphi(x_0,y_0,z_0,t)]}{dt} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.2}$$

La vitesse sera determinée : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ ……………………………II.3

- Les composantes de l'accélération:

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{d^2 f}{dt^2} \\[2ex] a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{d^2 \rho}{dt^2} \\[2ex] a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{d^2 \psi}{dt^2} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.4}$$

L'accélération sera déterminée : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ……………………II.5

II.2.2 *La méthode d'Euler:*

On déterminera donc en fonction du temps la vitesse des particules liquides qui viennent successivement passer par ce point.

La méthode d'EULER ne s'intéresse pas à la trajectoire des particules, mais au champ des vecteurs vitesses c à d en chaque point de l'espace au temps (t) correspond à une vitesse ($\vec{V}$).

Cette méthode consiste à considérer un point fixe de l'espace et à étudier, en fonction du temps, ce qui passe en ce point.

La particule qui passe au point M (Fig. II.2) M (x, y, z) à l'instant t consiste un groupe de variable indépendant d'Euler M (x, y, z, t).

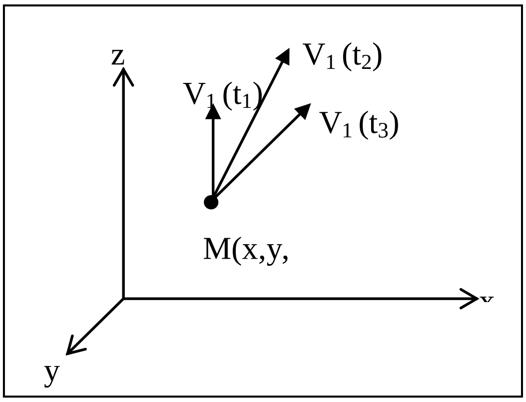

Fig. (II.2)

On déterminera donc, en fonction du temps la vitesse des particules liquides qui viennent successivement passer par ce point. La vitesse $\vec{V}$ (u,v,w).

$$\vec{V} \begin{cases} u = f(x,y,z,t) \\ v = \rho(x,y,z,t) \\ w = \psi(x,y,z,t) \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.6}$$

u,v et w sont les variables d'EULER.

La variation totale de la vitesse selon les axes x, y et z est donnée par:

$$\begin{cases} du = \dfrac{\partial u}{\partial t}dt + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz \\[2ex] dv = \dfrac{\partial v}{\partial t}dt + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy + \dfrac{\partial v}{\partial z}dz \\[2ex] dw = \dfrac{\partial w}{\partial t}dt + \dfrac{\partial w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.7}$$

L'accélération selon l'axe x est:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\substack{\text{Accélération locale} \\ \text{(dépend du temps)}}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}dx + v\frac{\partial u}{\partial y}dy + w\frac{\partial u}{\partial z}dz}_{\substack{\text{Accélération convective} \\ \text{(dépend de coordonnées)}}} \quad \text{…………} \quad \text{II.8}$$

L'accélération selon l'axe y est: $a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x}dx + v\frac{\partial v}{\partial y}dy + w\frac{\partial v}{\partial z}dz$

L'accélération selon l'axe z est: $a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x}dx + v\frac{\partial w}{\partial y}dy + w\frac{\partial w}{\partial z}dz$

L'accélération totale = L'accélération locale + accélération convective.

- ***Résumé :***

Alors que dans la description de Lagrange on suppose accompagnant chaque particule de son mouvement, un observateur capable d'indiquer à tout instant la position d'un élément fluide au quel il est lié, dans la description d'Euler, on dispose en chaque point de l'écoulement d'un observateur capable de repérer à tout instant la grandeur et la direction de la vitesse des particules passant en ce point.

La description lagrangienne n'est pratiquement jamais utilisée en mécanique des fluides, car elle exige la connaissance de la trajectoire de chaque particule du fluide et donc est peu pratique.

II.3 Lignes de courant:

On appelle lignes de courant les lignes tangentes, en chaque point et à chaque instant, au vecteur vitesse (Fig. II.3).

Les équations différentielles des lignes de courant s'écrivent:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \text{……………..II.9}$$

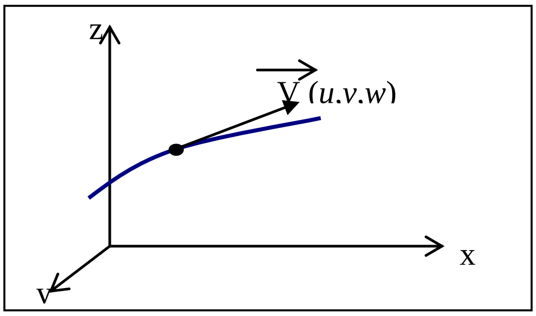

Fig. (II.3)

II.5 Les différents types de mouvement :

II.5 .1 *Mouvement non permanent ou in-stationnaire :*

Pour un mouvement non permanent, toutes les grandeurs scalaires ou vectorielles varient en fonction du temps et du point. Dans ce cas là les lignes de courant sont différents des trajectoires.

II.5.2 *Mouvement permanent ou stationnaire:*

Pour un mouvement permanent, toutes les grandeurs scalaires ou vectorielles sont constants dans le temps.

- Les grandeurs scalaires ou vectorielles ne dépendant que de x,y,z.
- Les lignes de courant vont restées les mêmes lorsque le temps varie.
- Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

II.6 Equation de la continuité:

L'équation de la continuité est une équation fondamentale de la mécanique des fluides, exprime le principe de conservation de la masse.

II. 6.1. *Etablissement de l'équation:*

Pour établir cette équation, on considère un volume de parallélépipède élémentaire, $d_x\, d_y\, d_z$ (Fig. II.4).

Pendant le temps *dt*, la masse liquide qui entre par la face *ABCD* est égale à : $\rho u dydzdt$

et la masse qui sort par la face *EFGH* est égale à :

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dydzdt$$

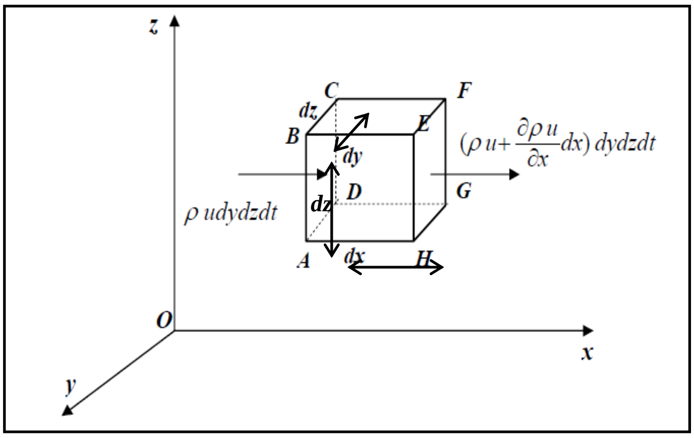

Fig. (II.4)

D'autre part, la différence des masses fluides entrant par la face ABCD et sortant par la face EFGH pendant l'intervalle de temps dt : $-[\frac{\partial \rho u}{\partial x}]\ d_x\, d_y\, d_z\, dt$

On fait la même opération pour les autres faces, on obtient:

$$-[\frac{\partial \rho v}{\partial y}]\ d_x\, d_y\, d_z\, dt$$

$$-[\frac{\partial \rho w}{\partial z}]\ d_x\, d_y\, d_z\, dt$$

Alors, la somme des masses fluides qui entrent dans le parallélépipède diminuée de celles qui sortent, est :

$$-[\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}]dxdydzdt \quad \text{………………II.10}$$

La variation de la masse du parallélépipède pendant un temps *dt*, est égale à la somme des masses fluides entrantes diminuées de celles sortantes, soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dtdxdydz$$

D'ou l'égalité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}) \quad \text{……………II.11}$$

Que l'on écrit généralement sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad \text{……………………II.12}$$

L'équation II.12 c'est l'équation de la continuité.

- **Cas particuliers:**

Pour un liquide incompressible et permanant :

L'équation de la continuité devient:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad \text{Ou} \qquad \operatorname{div}\vec{V}=0 \quad \text{.................II.13}$$

Où $\vec{V}=(u,v,w)$ est le vecteur vitesse.

Donc pour un écoulement permanant et incompressible et plan, x, y, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

- **Débit :**

  Multiplions l'équation de la continuité par un volume élémentaire dW et intégrons par rapport au volume, on obtient:

$$\int_W div\vec{V}dW=0$$

Selon le théorème de Gauss on peut transformer une intégrale de volume en un intégrale de surface (fermée): $\int_W div\vec{V}dW=\int_s Vpds=0$ II.14

Où Vp est la composante de la vitesse qui est perpendiculaire à la surface du volume. Donc pour un fluide incompressible, l'interprétation physique est la suivante: les débits entrant et sortant à travers une surface quelconque fermée doivent êtres égaux.

Par définition le débit total (***Q***), traversant une surface est donné par:

$$\int_S Vpds=V.S=Q \quad \text{.............. II.15}$$

Où V: la vitesse moyenne sur cette surface. S.

- *Tube de courant :* On appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient, au même instant, sur un contour fermé quelconque tracé dans le fluide (Fig. II.5).

  Si l'écoulement est permanent et incompressible, alors le débit massique est conservé à travers toute section droite du tube de courant :

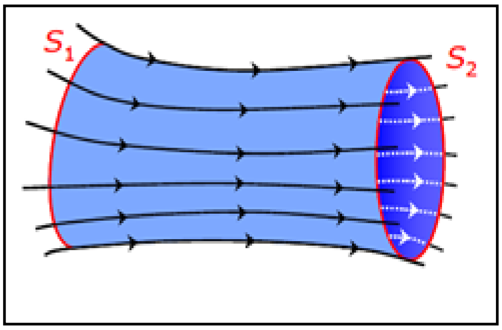

Fig. (II.5) : Tube de courant

$$Q=V_1\times S_1=V_2\times S_2$$

II.7. Fonction de courant:

D'après l'expression (II.9) l'équation des lignes de courant pour un écoulement plan (Oxz), permanant et incompressible est:

$$-wdx+udz=0 \text{.....................II.16}$$

Supposons qu'il existe une fonction ψ(x,y), de façon à avoir en chaque points du plan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad \text{Et} \qquad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ ....II.17}$$

La fonction ainsi définie est appelée fonction de courant.

Par substitution de l'équation (II.17) dans l'équation (II.16), on a:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial z}dz = d\psi = 0 \text{ ....II.18}$$

La différentielle total dψ est donc nulle ψ =Cte le long d'une ligne de courant de l'écoulement.

- **Interprétation physique.**

Considérons deux lignes de courant, ψ et $\psi + \Delta\psi$ voisines et séparées l'une de l'autre par une distance dn (Fig. II.6).

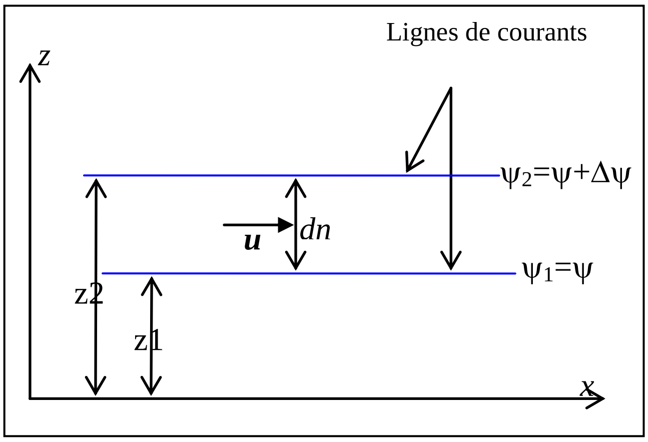

Fig.(II.6)

Le débit unitaire (q) entre ces deux lignes de courant peut être obtenu en considérant le débit à travers la section *dn* ; alors:

$$q = \int_{z1}^{z2} u dz = \int_{z1}^{z2} \frac{\partial \psi}{\partial z} dz$$

Et puisque $\frac{\partial \psi}{\partial z} dz = d\psi$

d'où $\quad dq = \int_{\psi 1}^{\psi 2} d\psi = (\psi_2 - \psi_1) = \Delta\psi$ II.19

Le débit unitaire $q = Vp * dn$ entre deux lignes de courant $\psi_1, et \psi_2$ est constante et égale à $\Delta\psi$.

II.8Ecoulement irrotationnel:

II.8.1 *Rotation :*

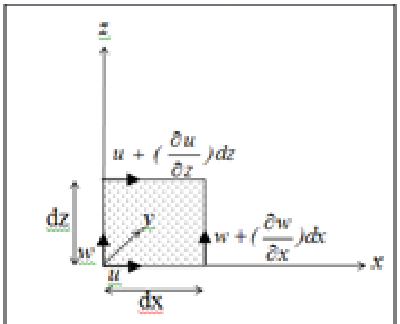

Fig. (II.7 a)

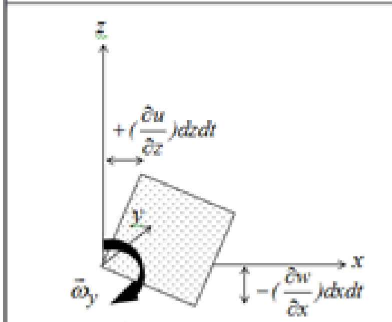

Fig. (II.7 b)

Considérons un élément de fluide de section *dx dz* qui subit une rotation pendant un temps dt (Fig. II.7.a et b).

Le taux de rotation de cet élément de fluide *dx dz*, autour d'un axe passant par *y*, on considère le sens positif c'est le sens des aiguilles d'un élément montre.

$$-\frac{[w + (\partial w/\partial x) dx - w]}{dx} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

Et suivant z:

$$+\frac{[u + (\partial u/\partial z) dz - u]}{dz} = +\frac{\partial u}{\partial z}$$

Le taux net de la rotation de cet élément de fluide, autour l'axe y représente la moyenne de la somme de rotation dans les faces *dx* et *dz*, on le définie comme suite :

$$\vec{\omega}_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.20}$$

Faisons de même pour les autres sections *dy dz* et *dx dy*,

$$\vec{\omega}_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

On obtient alors le vecteur tourbillon ou vorticité du champ de vitesses.

$$\vec{\Omega}(\vec{\omega}_x, \vec{\omega}_y, \vec{\omega}_z) = \frac{1}{2} rot\vec{V} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.21}$$

$\vec{\Omega}$ Est égale à la moitié du vecteur rotationnel. Ceci correspond à un mouvement de rotation en bloc à vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, de l'élément liquide autour de son axe.

II.8.2 *Irrotationalité:*

Si le vecteur tourbillon est nul en tout point:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} rot\vec{V} = 0 \ldots\ldots\ldots \text{II.22} \Rightarrow \text{ sont appelés écoulement irrotationnel}$$

Pour un écoulement plan en *x z* :

$$\vec{\omega}_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.23}$$

$$\text{Ce qui donne } \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.24}$$

II.9 Potentiel des vitesses:

Dans l'écoulement irrotationnel ($\vec{\Omega}$ = 0), $\vec{V}$ peut être exprimée par une fonction $\emptyset$ appelée potentiel des vitesses, telle que: $\vec{V} = \overrightarrow{grad}\emptyset$

Dont les trois composantes sont:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y},\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \ldots(\text{m}^2/\text{s})\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.25}$$

Un tel écoulement est dis écoulement à potentiel des vitesses ou, plus brièvement, écoulement potentiel.

Les lignes équipotentielles sont telles que la fonction ϕ conserve la même valeur en tout point de chacune d'elles; les équipotentielles sont données par:

ϕ (*x*, *y*, *z*) =Constante ou ϕ(x, z) = Constante.

Par substitution de la fonction ϕ dans l'équation de continuité pour un liquide parfait, incompressible et conservatif, on obtient:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\nabla^2\phi=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.26}$$

$$div(\overrightarrow{grad}\,\emptyset)=0$$

Par conséquent, un tel écoulement irrotationnel satisfait à l'équation de Laplace $\nabla^2\phi=0$, la fonction ϕ est donc harmonique.

II.10. *Réseau des lignes ψ et ϕ*

Pour un écoulement plan en *x z*, incompressible et irrotationnel, le potentiel des vitesses ϕ**,** et la fonction de courant ψ**,** existent et sont liés entre eux.

Les composantes de vitesses en fonction de ψ et ϕ :

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad , \; w=\frac{\partial\phi}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.25}$$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad , \; w=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.26}$$

D'après ses égalités, on constate les relations suivantes entre ψ et ϕ**:**

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad , \; \frac{\partial\phi}{\partial z}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.27}$$

Ces équations représentent les conditions de Gauchey – Riemamn.

La condition d'irrotationnalité dans le plan *x z* est donnés par:

$$-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \ldots\ldots \text{II.28}$$

Tenant compte de la condition d'irrotationalité dans le plan *x z* donnée par :

$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\nabla^2\psi=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.29}$$

Donc pour un écoulement irrotationnel et plan la fonction ψ, satisfait l'équation de Laplace (harmonique).

Lorsque l'écoulement est plan $\phi(x,y)=Cte$ appeler équipotentiel ou $d\phi=0$

Par conséquent les lignes de courant et les lignes équipotentielles forment donc un réseau orthogonal (Fig. II.8).

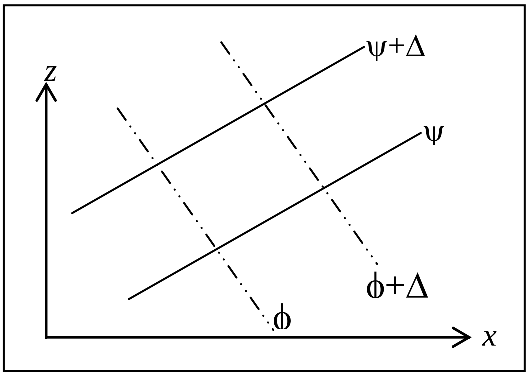

Fig. (II.8)

II.11. Différents type d'écoulement :

II.11.1 *Écoulement uniforme plan:*

Un écoulement est dit *uniforme* si les vitesses de toutes les particules sont les mêmes en tout point du fluide : elles ne dépendent pas de leur position.

Les lignes de courant et d'équipotentiels sont alors définies par :

$$\emptyset(x,y) = u = Cte \quad et \quad \psi(x,y) = v = Cte \,.$$

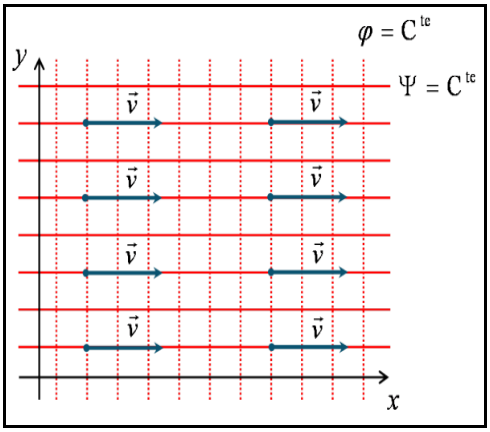

Fig. (II.9)

Les ligne de courants sont des droites horizontales (toutes parallèles à l'axe *x*). Tandis que les équipotentielles sont des droites verticales (toutes parallèles à l'axe *y*). Comme il se doit, on remarque que les lignes de courant sont de fait orthogonales aux équipotentielles (Fig. II.9).

II.10.2 *Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits :*

L'écoulement autours d'un puits c'est un écoulement *radial*, centré sur l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine (Fig. II.10). L'écoulement peut être divergent correspond à l'effet d'une *source à l'origine* ou convergent correspond à l'effet d'un *puits à l'origine.*

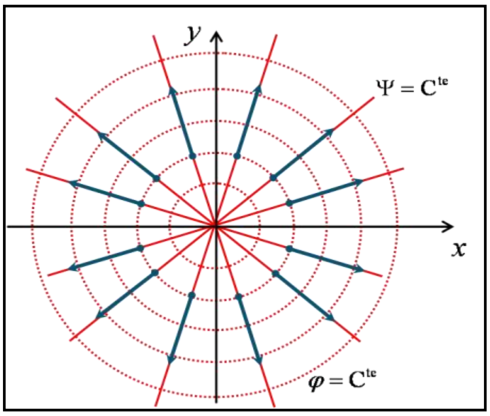

Fig. (II.10)

II.10.3. *Vortex ou tourbillon libre :*

C'est un *écoulement orthoradial,* tournant autour de l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine (Fig. I.11). On notera la différence avec l'écoulement radial généré par un puits ou une source : les lignes de courant et les équipotentielles sont inter-changées.

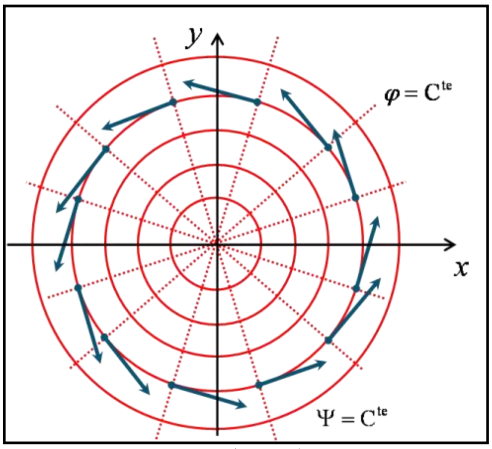

Fig. (II.11)