

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF – M'SILA

PHYSIQUE 2

ELECTRICITE
ET MAGNETISME

Rappel de cours

1^{ère} Année Licence LMD

Domaine ST et SM

Dr. BENHAMIDA Mohamed

Année universitaire 2015/2016

Avant-propos

Ce cours de physique 2 (électricité et magnétisme) a été rédigé à l'intention des étudiants qui préparent, une licence dans les domaines des Sciences de la Matière et des Sciences et Technologies. Il est conforme au programme officiel.

Il est enseigné en un semestre, à raison de trois heures de cours par semaine est complété par une heure et demi de travaux dirigés et une heure et demi de travaux pratiques. Le contenu du programme proposé par la tutelle est relativement vaste, pour être traité en un seul semestre, l'enseignant doit alors se limiter dans les développements importants et c'est à l'étudiant de fournir un effort supplémentaire pour prendre en charge ces développements.

Ce cours est essentiel pour l'étudiant en technologie. Le cours se divise en quatre parties : rappels mathématiques ; électrostatique ; circuits électriques ; magnétostatique. Dans la première partie, l'étudiant apprend à manipuler les outils mathématiques pour caractériser au mieux les champs physiques et géophysiques que l'on est amené à décrire : définition de nouveaux opérateurs scalaires et vectoriels destinés à simplifier l'analyse du problème physique considéré. Dans la deuxième partie, on étudie les forces électriques, les champs électriques et le potentiel électrique dans des situations électrostatiques. Dans la troisième partie, on analyse le déplacement des charges électriques dans les circuits composés de condensateurs, de résistances et de sources de tension. Finalement, dans la quatrième partie, on examine les sources du champ magnétique et le comportement des charges électriques en présence d'un champ magnétique.

Au terme de ce cours, l'étudiant aura acquis les connaissances élémentaires en matière d'électricité et de magnétisme de façon à pouvoir analyser et interpréter les phénomènes connexes qui y sont reliés.

La liste des ouvrages consultés lors de l'élaboration de ce cours et qui figure à la fin du manuscrit, dans la rubrique 'Références bibliographique', est loin d'être exhaustive. Elle correspond à un choix que j'ai fait. La liste des sites consultés serait trop longue à écrire, nous en mentionnerons dans la rubrique 'Sites consultés', seulement les sites que j'ai consulté récemment.

Enfin, j'espère avoir ainsi modestement contribué à apporter un plus, en ce module de base, accessible aux étudiants de première année de Licence.

BENHAMIDA Mohamed.

Contenu du cours

I. RAPPELS MATHÉMATIQUES

I.1. Systèmes de coordonnées du plan et de l'espace.....	1
I.1.1. Systèmes de coordonnées dans le plan.....	1
a) <i>Coordonnées cartésiennes</i>	1
b) <i>Coordonnées polaires</i>	2
I.1.2. Systèmes de coordonnées dans l'espace	4
a) <i>Coordonnées cartésiennes</i>	4
b) <i>Coordonnées cylindriques</i>	6
c) <i>Coordonnées sphériques</i>	7
I.2. Intégrales linéiques, surfaciques, et volumiques.....	8
I.2.1. Intégrales linéiques	8
I.2.2. Intégrale de surface (double)	8
I.2.3. Intégrale de volume (triple)	9
I.2.4. Intégrale vectorielle ou circulation d'un vecteur.	9
I.3. Les dérivées premières	9
I.3.1. Gradient scalaire	9
I.3.2. La divergence d'un vecteur.....	10
I.3.3. Le rotationnel d'un vecteur	11

II. ÉLECTROSTATIQUE

II.1. Introduction.....	12
II.2. Propriétés de la charge électrique.....	14
II.3. Matériaux conducteurs, matériaux isolants.....	15
II.3.1. Matériaux isolants (diélectriques).....	15
II.3.2. Matériaux conducteurs.....	15
II.3.3. Distributions de charges.....	16
II.4. Interactions coulombiennes (électrostatiques).....	17
II.5. Le champ électrique.....	19
II.6. Potentiel électrostatique.....	24
II.7. Dipôle électrostatique.....	25
II.7.1. Potentiel et champ créés à grande distance.....	25
II.7.2. Potentiel dipolaire.....	25
II.8. Flux du champ électrique.....	28
II.9. Théorème de Gauss	30
II.9.1. Notion de Flux.....	30
II.9.2. Théorème de Gauss	30

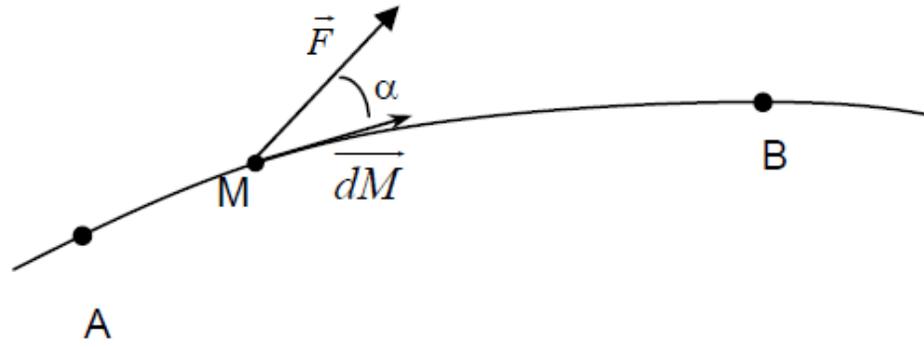
II.10. Equilibre électrostatique des conducteurs chargés.....	32
II.10.1. Définition d'un conducteur.....	32
II.10.2. Champ au voisinage d'un conducteur- Théorème de Coulomb.....	32
II.10.3. Propriétés électriques d'un conducteur creux.....	33
II.10.4. Pouvoir des pointes.....	34
II.10.5. Capacité propre d'un conducteur.....	35
II.10.6. Phénomène d'influence.....	36
II.11. Les condensateurs.....	38
II.11.1. Calcul de capacités.....	38
II.11.2. Associations de condensateurs.....	39

III. Electrocinétique

III.1. Courant et résistance électriques.....	40
III.1.1. Le courant électrique.....	40
III.1.2. Vecteur densité de courant.....	40
III.1.3. L'intensité du courant électrique.....	41
III.2. Loi d'Ohm microscopique (ou locale).....	41
III.3. Loi d'Ohm macroscopique (Résistance d'un conducteur).....	42
III.4. Associations de résistances.....	43
III.5. L'énergie.....	45
III.6. La loi de Joule.....	45
III.7. Circuit électrique.....	46
III.7.1. Le Circuit.....	46
III.7.2. Force électromotrice et générateur.....	47
III.7.3. Force contre électromotrice d'un récepteur.....	47
III.8. Lois De Kirchhoff.....	48
III.8.1. Loi des nœuds (conservation du courant).....	48
III.8.2. Loi des mailles (conservation de l'énergie).....	48

VI. Electromagnétisme

VI.1. Champ magnétique.....	50
VI.2. Force de Lorentz.....	51
VI.3. Loi de Laplace.....	52
VI.4. Loi de Faraday.....	52
VI.5. Loi de Biot et Savart.....	54
VI.6. Dipôle magnétique.....	55



I. RAPPELS MATHÉMATIQUES

I - Rappels mathématiques

I.1. Systèmes de coordonnées du plan et de l'espace

Suivant les bases de projection utilisées, plusieurs systèmes des coordonnées peuvent être utilisés pour repérer la position d'un point matériel M (cartésien, cylindrique et sphérique). Les vecteurs de bases de ces systèmes sont tous **unitaires** et **orthogonaux** deux à deux. Dans ce cours nous allons définir ces quatre types de systèmes des coordonnées à axes orthogonaux ainsi que les déplacements, surfaces et volumes élémentaires associés. Des exemples de calculs d'intégrale permettront alors de montrer l'importance de ces éléments différentiels.

I.1.1. Systèmes de coordonnées dans le plan

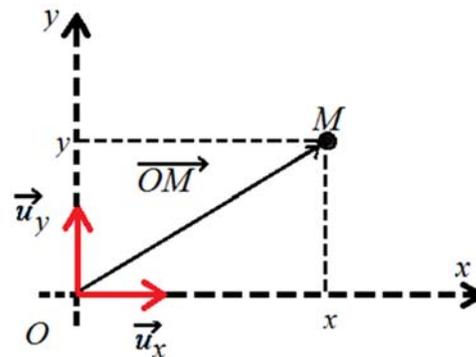
A) Coordonnées cartésiennes

a) Définition

Un point M quelconque du plan peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y) dans la base orthonormée \vec{u}_x, \vec{u}_y .

On peut alors écrire :

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$



x et y sont obtenus en projetant orthogonalement le vecteur position respectivement sur les trois axes Ox et Oy . $x = \vec{OM} \cdot \vec{i}$ et $y = \vec{OM} \cdot \vec{j}$ Les coordonnées cartésiennes d'un point M sont dénommées :

x est l'**abscisse** du point M ($-\infty < x < +\infty$)

y est l'**ordonnée** du point M ($-\infty < y < +\infty$)

Les vecteurs de base du système des coordonnées cartésiennes (\vec{u}_x, \vec{u}_y) sont définis par :

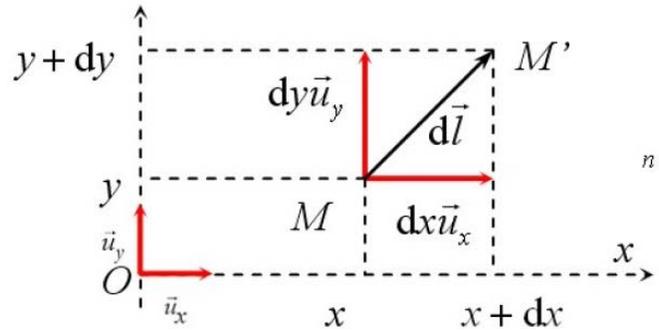
\vec{u}_x est un vecteur unitaire orienté vers x positif

\vec{u}_y est un vecteur unitaire orienté vers y positif

b) Déplacement infinitésimal

On envisage le déplacement infinitésimal du point $M(x, y)$ au point $M'(x + dx, y + dy)$. Le déplacement $\overrightarrow{MM'}$ peut alors s'écrire :

$$\overrightarrow{MM'} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y$$



c) Élément de surface infinitésimal

On considère la surface infinitésimale engendrée par le déplacement du point M précédemment décrit. L'aire de cette surface est donnée par:

$$ds = dx \cdot dy$$

Le système de coordonnées cartésiennes est très utile dans l'étude de mouvement rectiligne. Cependant, il existe des situations physiques (rotations en mécanique, calcul du champ électrique en électrostatique, magnétostatique, mécanique des fluides, physique atomique...) où l'utilisation de ce système s'avère inutilement complexe. Il serait donc plus utile de se pencher sur d'autres systèmes de coordonnées afin de faciliter l'étude de ces situations.

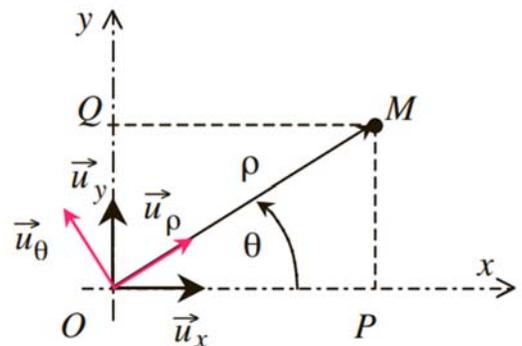
B) Coordonnées polaires

a) Définition

Dans le plan (Oxy), un point M est repéré en coordonnées cartésiennes par son abscisse x et son ordonnée y (deux distances). En coordonnées polaires, M est repéré en par une distance et un angle définis par :

ρ : distance du point M à l'origine O, $0 \leq \rho < +\infty$

θ : l'angle du dièdre direct (sens positif) appelé angle polaire $(\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



On peut alors écrire :

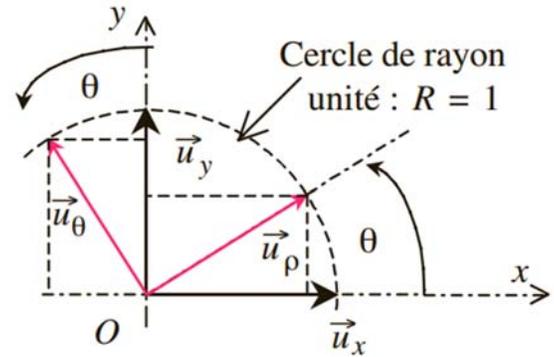
$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u}_\rho$$

avec $\rho \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Les vecteurs de base du système polaire sont $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta)$:

* \overrightarrow{u}_ρ : vecteur unitaire porté par le vecteur position OM

* $\overrightarrow{u}_\theta$: vecteur unitaire dirigé suivant θ croissants



Relations entre les coordonnées cartésiennes et polaires

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y$

En projetant le vecteur position, nous avons : $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$

A partir de ces deux relations, nous obtenons : $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

En projetant les vecteurs $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta)$ dans le système de coordonnées cartésiennes, nous obtenons :

$$\overrightarrow{u}_\rho = \cos(\theta) \overrightarrow{u}_x + \sin(\theta) \overrightarrow{u}_y$$

$$\overrightarrow{u}_\theta = -\sin(\theta) \overrightarrow{u}_x + \cos(\theta) \overrightarrow{u}_y$$

Dérivation angulaires des vecteurs de base

$$\overrightarrow{u}_\rho = \cos(\theta) \overrightarrow{u}_x + \sin(\theta) \overrightarrow{u}_y$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{d\theta} = -\sin(\theta) \overrightarrow{u}_x + \cos(\theta) \overrightarrow{u}_y = \overrightarrow{u}_\theta$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{d\theta} = \overrightarrow{u}_\theta$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta} = -\frac{d\theta}{d\theta} \sin(\theta) \overrightarrow{u}_x + \frac{d\theta}{d\theta} \cos(\theta) \overrightarrow{u}_y = -\overrightarrow{u}_\rho$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta} = -\overrightarrow{u}_\rho$$

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{d\theta} = \overrightarrow{u}_\theta \\ \frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{d\theta} = -\overrightarrow{u}_\rho \end{cases}$$

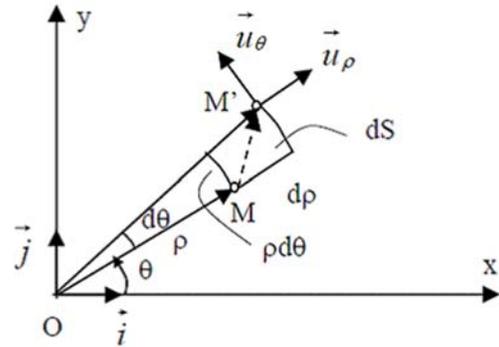
$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \overrightarrow{u}_\theta \\ \frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \overrightarrow{u}_\rho \end{cases}$$

b) Déplacement infinitésimal

On envisage le déplacement infinitésimal du point $M(\rho, \theta)$ au point $M'(\rho + d\rho, \theta + d\theta)$.

Le déplacement $\overrightarrow{MM'}$ peut alors s'écrire :

$$\overrightarrow{MM'} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta = d\overrightarrow{OM}$$



c) Élément de surface infinitésimal

On considère la surface infinitésimale engendrée par le déplacement du point M précédemment décrit. L'aire de cette surface est donnée par:

$$ds = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$$

I.1.2. Systèmes de coordonnées dans l'espace

A) Coordonnées cartésiennes

a) Définition

Un point M quelconque de l'espace peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y et z dans la base associée au repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

On peut alors écrire:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

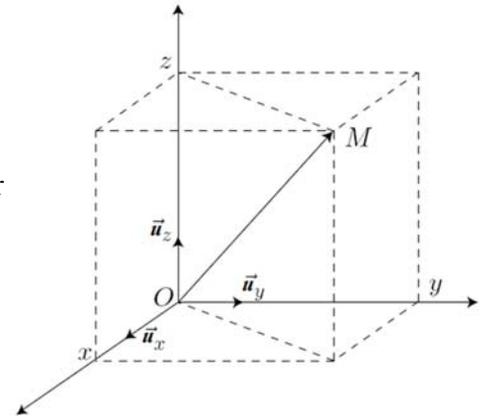
x, y et z sont obtenus en projetant orthogonalement le vecteur position respectivement sur les trois axes Ox, Oy et Oz . $x = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i}; y = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}$ et $z = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k}$ Les coordonnées cartésiennes d'un point M sont dénommées :

x est l'**abscisse** du point M ($-\infty < x < +\infty$)

y est l'**ordonnée** du point M ($-\infty < y < +\infty$)

z est la **cote** de M ($-\infty < z < +\infty$)

Les vecteurs de base du système des coordonnées cartésiennes $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont définis par :



\vec{u}_x est un vecteur unitaire orienté vers x positif

\vec{u}_y est un vecteur unitaire orienté vers y positif

\vec{u}_z est un vecteur unitaire perpendiculaire (\perp) aux deux autres vecteurs de base et orienté vers z positif (tel que le trièdre $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit direct). Autrement, il est défini par :

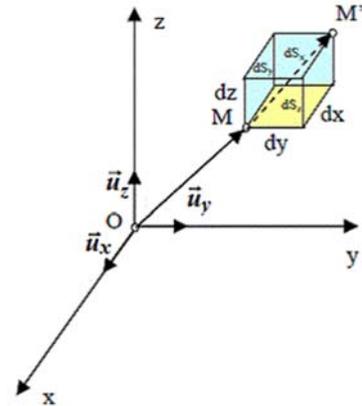
$$\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$$

b) Déplacement infinitésimal

On envisage le déplacement infinitésimal du point $M(x, y, z)$ au point $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$.

Le déplacement $\overrightarrow{MM'}$ peut alors s'écrire :

$$\overrightarrow{MM'} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$



c) Élément de volume infinitésimal

Le déplacement de M à M' engendre un volume élémentaire limité par six surface parallèles deux à deux dont $\overrightarrow{MM'}$ est une diagonale principale.

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

d) Élément de surface infinitésimal

Fixant l'une des coordonnées, le point M se déplace dans une surface élémentaire d'aire :

$$dS_x = dy \cdot dz \text{ si l'on fixe l'abscisse } x ;$$

$$dS_y = dx \cdot dz \text{ si l'on fixe l'ordonnée } y ;$$

$$dS_z = dx \cdot dy \text{ si l'on fixe la cote } z$$

B) Coordonnées cylindriques

a) Définition

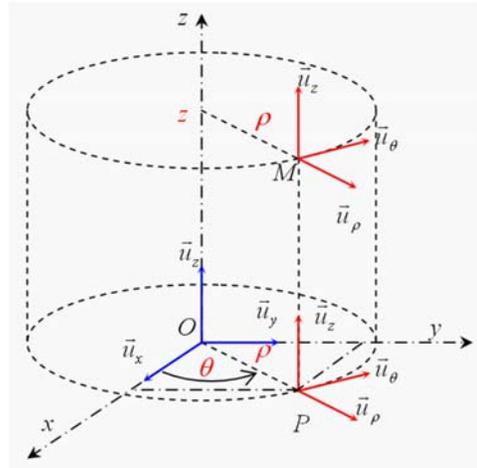
Un point M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées cylindriques ρ , θ et z dans la base associée au repère cylindrique

$$(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$$

On peut alors écrire :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

avec $\rho \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $z \in \mathbb{R}$



Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

b) Déplacement infinitésimal

On envisage le déplacement infinitésimal du point

$M(\rho, \theta, z)$ au point $M'(\rho + d\rho, \theta + d\theta, z + dz)$.

Le déplacement \vec{MM}' peut alors s'écrire :

$$\vec{MM}' = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z = d\vec{OM}$$

c) Élément de volume infinitésimal

On considère le volume infinitésimal dV engendré par le déplacement du point M précédemment décrit.

Ce volume est donné par:

$$dV = d\rho \cdot \rho d\theta \cdot dz$$

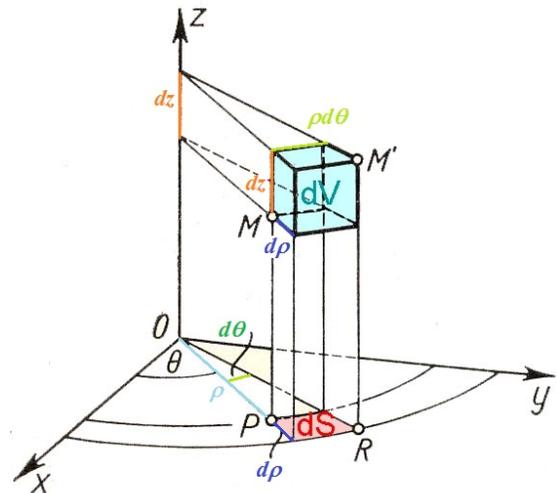
d) Élément de surface infinitésimal

Fixant l'une des coordonnées, le point M se déplace dans une surface élémentaire d'aire :

$$dS_\rho = \rho d\theta \cdot dz \quad \text{Si l'on fixe le rayon } \rho ;$$

$$dS_\theta = d\rho \cdot dz \quad \text{Si l'on fixe l'angle } \theta ;$$

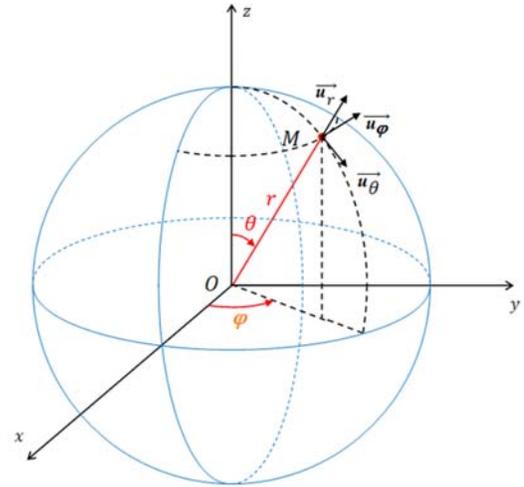
$$dS_z = d\rho \cdot \rho d\theta \quad \text{Si l'on fixe la côte } z$$



C) Coordonnées sphériques

a) Définition

Un point M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées sphériques r, θ et φ dans la base associée au repère sphériques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$



On peut alors écrire :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r$$

avec $r \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Ainsi que les vecteurs unitaires

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y \end{cases}$$

b) Déplacement infinitésimal

On envisage le déplacement infinitésimal du point $M(r, \theta, \varphi)$ au $M'(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$.

Le déplacement \vec{MM}' peut alors s'écrire :

$$\vec{MM}' = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

c) Élément de volume infinitésimal

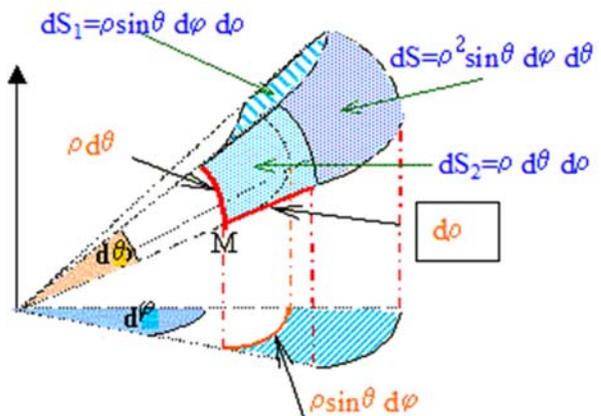
On considère le volume infinitésimal dV engendré par le déplacement du point M précédemment décrit.

Ce volume est donné par :

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

d) Élément de surface infinitésimal

$dS = r d\theta \cdot r \sin \theta \cdot d\varphi$ Si l'on fixe le rayon r



I.2. Intégrales linéiques, surfaciques, et volumiques.

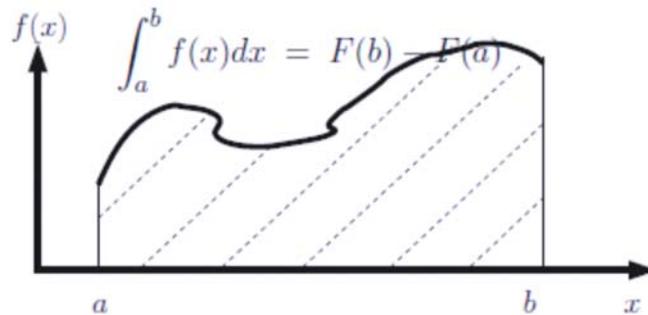
I.2.1. Intégrales linéiques.

On appelle primitive d'une fonction $f(x)$ une fonction $F(x)$ telle que f soit la dérivée de F .

Par exemple

$$f(x) = \cos(x), F(x) = \sin(x) + C$$

Où C est une constante d'intégration ; F est définie à une constante près.



Physiquement, l'intégrale ci-dessus est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la fonction f entre $x = a$ et $x = b$. On peut aussi réécrire

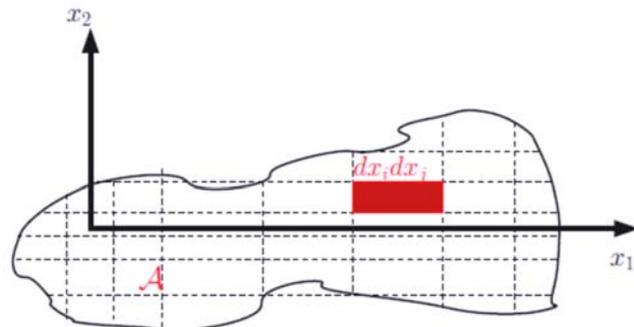
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Où dx est infiniment petit

I.2.2. Intégrale de surface (double)

On a maintenant à intégrer une surface dans un repère cartésien. On découpe alors la surface en une infinité de petits éléments de surface $dx_i dx_j$.

$$\iint_A dx_1 dx_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M x_i x_j$$



1.2.3. Intégrale de volume (triple)

On a maintenant à intégrer un volume dans un repère cartésien. On découpe alors le volume en une infinité de petits éléments de volume $dx_i dx_j dx_k$.

$$\iiint_V dx_i dx_j dx_k = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^L x_i x_j x_k$$

On sera souvent amené à calculer des intégrales simples, doubles, triples, en coordonnées cartésiennes, cylindriques & sphériques.

1.2.4. Intégrale vectorielle ou circulation d'un vecteur.

Soit un arc AB sur une courbe C parcouru par un point M dans un certain sens. Soit \vec{F} un vecteur fonction du point.

On appelle circulation du vecteur \vec{F} le long de l'arc AB

la valeur de l'intégrale curviligne $\int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dM}$

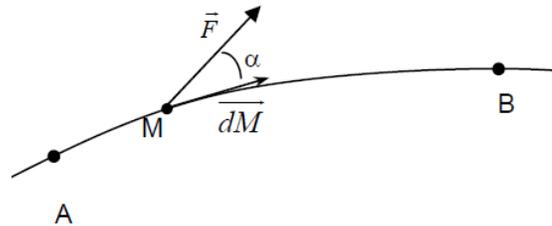
\overrightarrow{dM} est le vecteur tangent à la courbe C au point M.

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{dM} = F \cdot dM \cdot \cos \alpha$$

avec α angle entre \vec{F} et \overrightarrow{dM} . Dans le cas général α varie suivant M.

Si \vec{F} est une force, la circulation de cette force le long de l'arc AB est le travail de cette force.

On note $\oint \vec{F} \cdot \overrightarrow{dM}$ la circulation du vecteur \vec{F} suivant un contour fermé.



1.3. Les dérivées premières

1.3.1. Gradient scalaire

Soit une fonction $y = f(x)$, $f'(x) = \frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

dx est la différentielle de x

Dérivée totale :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Différentielle (variation de f quand $M(x, y, z) \rightarrow M(x + dx, y + dy, z + dz)$ à un temps t constant:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Or le vecteur déplacement infinitésimal s'écrit

$$\overrightarrow{dM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$$

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM} \quad \text{d'où}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

définition du **GRADIENT** scalaire en coordonnées cartésiennes

Le gradient quantifie les variations de f selon les 3 coordonnées (x, y, z).

$\overrightarrow{\text{grad}} f$ pointe dans la direction où la variation d'amplitude est max.

Exemple : Si on a une carte topographique avec des lignes de niveaux, le vecteur gradient pointe dans la direction où les lignes de niveaux sont le plus rapprochées, dans la direction de plus grande pente.

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM} = |\overrightarrow{\text{grad}} f| |\overrightarrow{dM}| \cos \theta$$

- ✓ Si on se déplace parallèlement au gradient ($\cos(\theta) = 1$), on maximise les variations de f.
- ✓ Si on suit une ligne d'isovaleur ($df = 0$), alors la définition ci-dessus nous indique qu'on se déplace perpendiculairement au vecteur gradient de la fonction f.

$\overrightarrow{\text{grad}} f$ est perpendiculaire aux lignes de niveaux.

1.3.2. La divergence d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{A} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

Par définition, la divergence du vecteur \vec{A} en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Le résultat de la divergence d'un vecteur est un *SCALAIRE*.

La divergence caractérise comment un champ évolue dans sa propre direction car cet opérateur fait intervenir des dérivées partielles non-croisées (par exemple $\frac{\partial A_x}{\partial x}$).

- ✓ Si $\text{div } \vec{A} \neq 0$ alors on dit que le champ possède une source ou un puits de champ, il est dit à flux non-conservatif (voir les exemples plus loin).
- ✓ Si $\text{div } \vec{A} = 0$, le flux est dit à champ conservatif, il est dit solénoïdal.

Divergence en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Divergence en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

I.3.3. Le rotationnel d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{A} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

Par définition, la rotationnel du vecteur \vec{A} en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

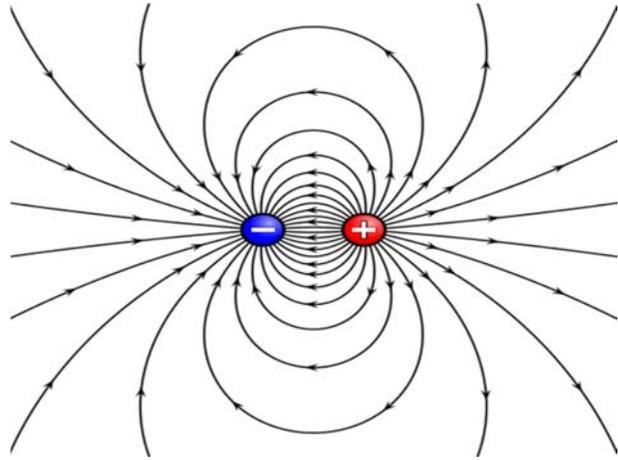
- Le résultat du rotationnel d'un vecteur est un *VECTEUR*.
- Le rotationnel fait intervenir les dérivées partielles croisées d'un champ de vecteur (par exemple $\frac{\partial A_x}{\partial y}$). Il caractérise le cisaillement d'un champ de vecteur.

Rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho - \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_z$$

Rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$



II. ÉLECTROSTATIQUE

II - Electrostatique

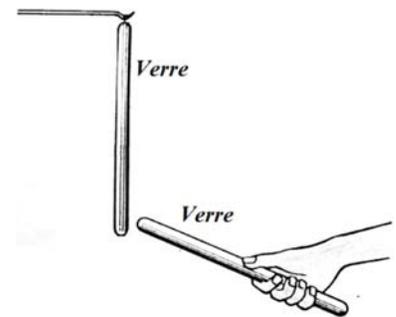
II.1. Introduction

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques pour l'observateur. Les lois obtenues peuvent se généraliser à des systèmes variables (quasi-électrostatique) pourvu que la distribution des charges puisse être considérée comme en équilibre à chaque instant.

Depuis l'Antiquité il est connu que certains matériaux, dont l'ambre, attirent des objets de petite taille après avoir été frottés. Le mot grec pour ambre (électron), a donné son nom à de nombreux domaines scientifiques. L'électrostatique décrit notamment les forces qu'exercent les charges électriques entre elles : il s'agit de la loi de Coulomb. Cette loi sera énoncée au chapitre I. Pour connaître les propriétés de la charge électrique, on peut mener quelques expériences élémentaires à l'aide de tiges de plastique, de verre et de métal munies d'une poignée de bois. On a aussi besoin de morceaux de laine et de soie ainsi que la ficelle.

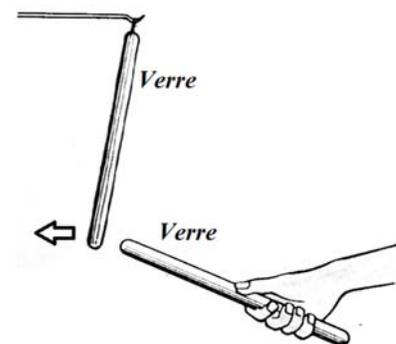
Expérience 1 :

On approche une tige de plastique d'une autre tige de plastique suspendue. Les tiges n'ont été frottées ni avec la laine ni avec de la soie. Les tiges restent immobiles. Il n'y a donc aucune force entre les deux tiges. On dit que les tiges sont neutres.



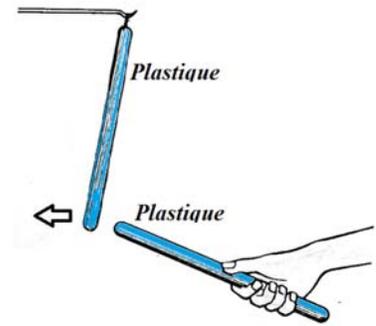
Expérience 2 :

On frotte deux tiges de l'expérience 1 avec de la laine. Lorsqu'on approche la première tige de la tige suspendue, il y a une répulsion entre les tiges

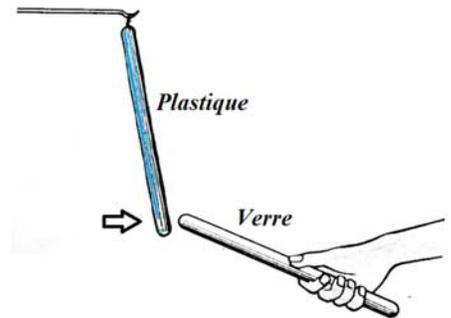


Experience3 :

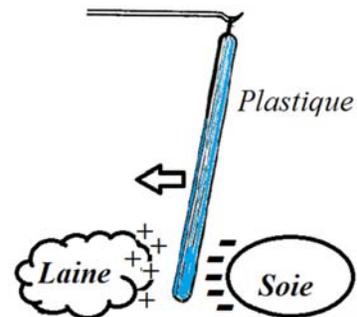
On frotte deux tiges de plastique avec de la soie.
Lorsqu'on approche la première tige de la tige suspendue,
il y a une répulsion entre les tiges

**Experience4 :**

On frotte une tige de verre avec de la soie et une tige de
plastique avec de la laine. On suspende la tige de
plastique. Lorsqu'on approche la tige de verre, il y a une
attraction entre les tiges.

**Experience5 :**

On frotte une tige de verre avec de la soie et une tige de
plastique avec de la laine. On suspende la tige de
plastique entre deux matières. La tige de plastique est
attirée par la laine utilisée pour charger la tige. De plus, la
tige est repoussée par la soie ayant servi à la charge la
tige de verre



Dans ces expériences, le module de la force est le plus grand lorsqu'on diminue la distance entre les tiges ou lorsqu'on frotte plus longtemps les tiges. Ces expériences montrent que les tiges acquièrent respectivement une charge électrique nette lorsqu'on les frotte avec de la laine ou de la soie. Elles démontrent aussi que les objets chargés exercent l'un sur l'autre une force à distance qu'on appelle la force électrique. Cette force est soit attractive (voir l'expérience 4), soit répulsive (voir l'expérience 2 et 3). L'expérience 5 prouve que la laine devient aussi chargée après avoir été frottée sur le plastique. La laine se comporte comme la tige de verre et attire la tige de plastique. De plus, la soie ayant servi à charger une tige de verre repousse la tige de plastique. Elle se comporte comme le plastique.

Convention : la charge de la tige de verre frottée avec la soie est *positive*, et celle de la tige plastique frottée avec de la laine est *negative*.

II.2. Propriétés de la charge électrique

La charge électrique, qui caractérise l'état d'électrisation d'une charge élémentaire, est toujours liée à la matière : toutes les particules élémentaires chargées ont une masse non nulle. En outre, la charge électrique possède des propriétés remarquables.

- ✓ La charge électrique peut exister sous deux formes, l'une qualifiée de positive, l'autre de négative. Ce choix est purement conventionnel.
- ✓ La charge électrique d'un système est une grandeur extensive ; elle peut se mettre sous la forme de la somme algébrique des charges élémentaires qui la constituent.
- ✓ L'expérience montre que la charge électrique totale d'un système ne peut être ni détruite, ni créée. Elle se conserve.
- ✓ De nombreuses expériences, dont la plus célèbre fut réalisée par le physicien américain P. Millikan en 1920, montrent que la charge électrique d'un système ne peut varier que par multiples entiers d'une charge élémentaire de valeur

$$e = 1,60217733 \times 10^{-19} \text{ C} \sim 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

L'unité C du système international étant le coulomb.

La charge d'un système quelconque s'écrit donc : $Q = Ze$, Z étant un entier positif ou négatif.

- ✓ La charge électrique d'un système est invariante par changement de référentiel galiléen ; sa valeur ne dépend pas du référentiel galiléen dans lequel on la mesure.

II.3. Matériaux conducteurs, matériaux isolants

Du point de vue électrique, on distingue deux grandes familles de matériaux : les isolants et les conducteurs

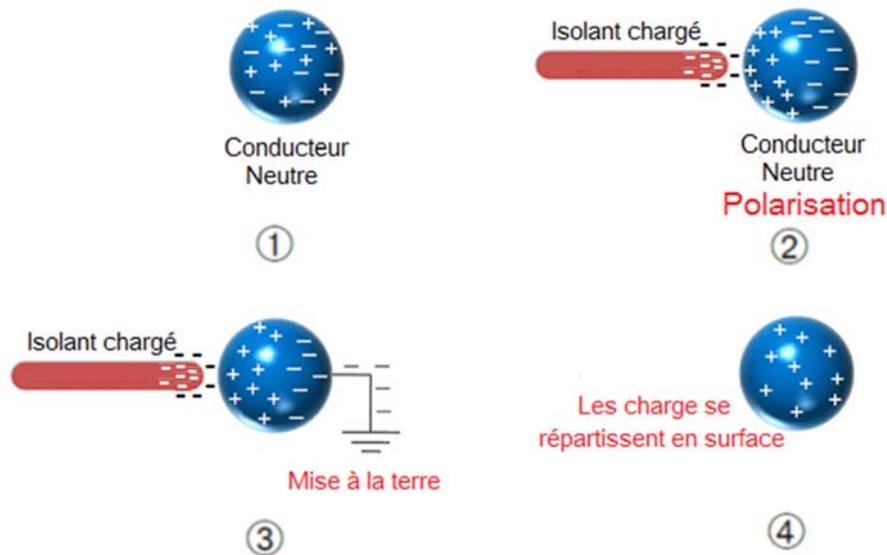
II.3.1. Matériaux isolants (diélectriques)

Les corps qui par leur structure interne, ne permettent pas le passage des électrons libres d'un atome à un autre sont appelés des isolants électriques (ébonite, verre, porcelaine, les matières plastiques ...), les isolants se charge par friction.

II.3.2. Matériaux conducteurs

Dans ce type de matériau, les charges sont libres de se déplacer et se répartissent dans l'ensemble du matériau sous l'effet de la répulsion électrostatique.

Un conducteur se charge par induction :



À l'échelle macroscopique :

- un objet chargé **néativement** comporte un **excès** de charges négatives ;
- un objet chargé **positivement** comporte un **déficit** de charges négatives.

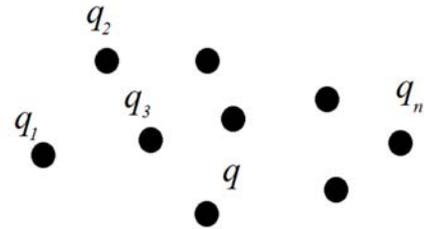
II.3.3. Distributions de charges

L'étude des propriétés physiques des corps chargés électriquement nécessite une description mathématique de la répartition des charges. On distinguera les distributions discrètes et les distributions continues :

a) Distributions discrètes

- Charge ponctuelle

On considérera une charge comme ponctuelle quand la distance charge – observateur est très grande devant la taille caractéristique de la charge.



- Distribution discrète

Ensemble de charges discernables par un observateur $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$

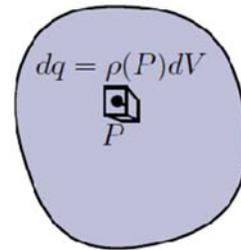
b) Distributions continues

- Distribution volumique :

Les charges, indiscernables à l'échelle macroscopique, sont contenues dans un volume v . Le petit volume Δv autour du point M contient la quantité de charges Δq .

On définit la **densité volumique** de charges ρ par :

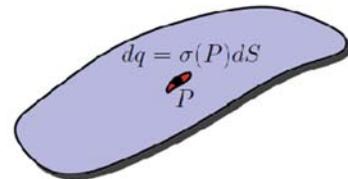
$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad [\rho] = C \cdot Cm^{-3}$$



- Distribution surfacique :

On définit la densité surfacique de charges σ par :

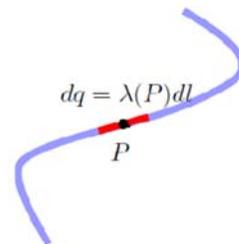
$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad [\sigma] = C \cdot Cm^{-2}$$



- Distribution linéique :

On définit la densité surfacique de charges λ par :

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad [\lambda] = C \cdot Cm^{-1}$$



Nous verrons ultérieurement l'importance des symétries que peuvent présenter les distributions de charges dans la détermination des champs électriques créés par celles-ci.

II.4. Interactions coulombiennes (électrostatiques).

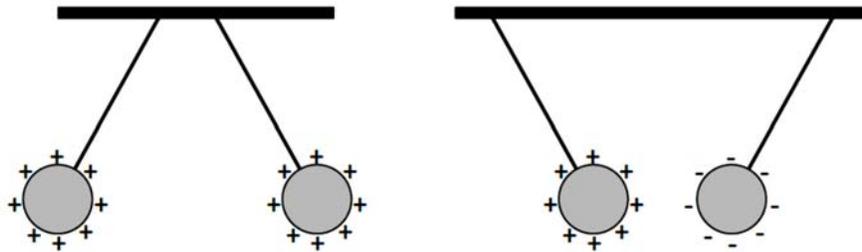
Ensemble de deux interactions réciproques qu'exercent l'un sur l'autre deux systèmes chargés électriquement.

Expérimentalement, on observe que :

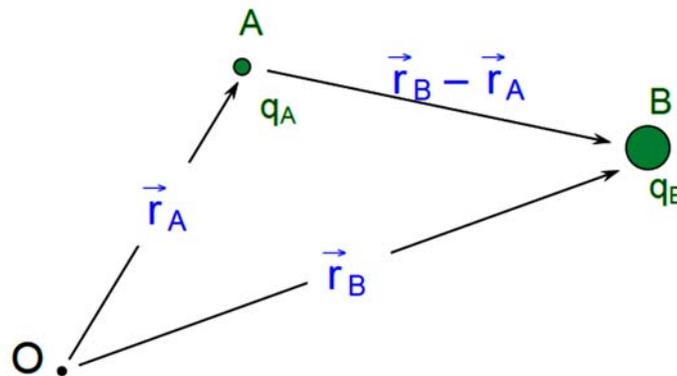
- Les charges de même signe (+) (+) ou (-) (-) se repoussent ;
- Les charges de signes opposés (+) (-) ou (-) (+) s'attirent.

Exemples :

- sphères chargées électriquement



Cas de deux charges ponctuelles q_A et q_B



La **loi de Coulomb** (électrostatique) indique que la force exercée par A sur B s'exprime sous forme vectorielle par :

$$\vec{F}_{AB} = K \frac{q_A q_B}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2} \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|}$$

Dans le système S.I. : $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

Avec : ϵ_0 : permittivité diélectrique **du vide**

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \Rightarrow K = 8.9877 \cdot 10^{+9} \text{ S.I.}$

Ou encore :

$$\vec{F}_{AB} = K \frac{q_A q_B}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2} \vec{u}_{AB}$$

Avec $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|} = \frac{\vec{AB}}{AB}$ vecteur unitaire

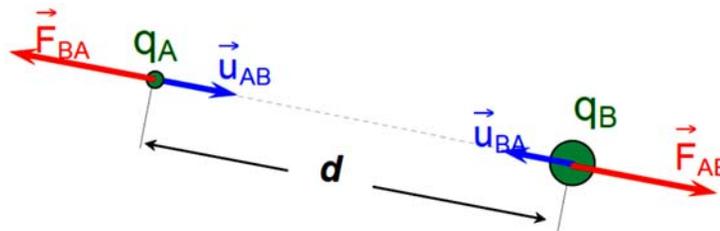
Force exercée par B sur A :

$$\vec{F}_{BA} = K \frac{q_B q_A}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}$$

Ou encore :

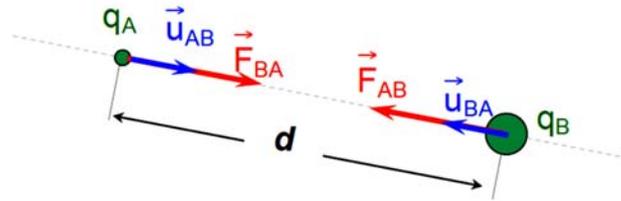
$$\vec{F}_{BA} = K \frac{q_B q_A}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2} \vec{u}_{BA}$$

1^{er} cas : $q_A q_B > 0$ charges de même signe (+)(+) ou (-)(-)



Interaction répulsive

2^{ème} cas : $q_A q_B < 0$ charges opposées (+) (-) ou (+) (-)



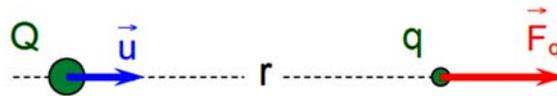
Interaction attractive

On a toujours $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

II.5. Le champ électrique

II.5.1. Définition

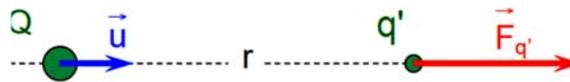
On considère une charge Q fixe et on approche une charge q en un point M situé à une distance r de celle-ci.



La loi de Coulomb indique que q subit une force électrostatique :

$$F_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{u}$$

Si on remplace q par q' , la force devient :



$$F_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq'}{r^2} \vec{u}$$

La grandeur vectorielle \vec{F}/q est indépendante de q ou q' :

$$\frac{\vec{F}_q}{q} = \frac{\vec{F}_{q'}}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u} = \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_q = q \cdot \vec{E} \\ \vec{F}_{q'} = q' \cdot \vec{E} \end{cases}$$

\vec{E} ne dépend que la charge source Q et de la distance par-rapport à cette source. Cette grandeur est définie comme étant le champ électrostatique créé par la charge Q .

La présence d'une charge électrique modifie donc les propriétés locales de l'espace en faisant apparaître un champ électrostatique affectant chaque point de l'espace.

$\vec{E}(M)$ est un champ vectoriel défini en (presque) tous les points de l'espace :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}$$

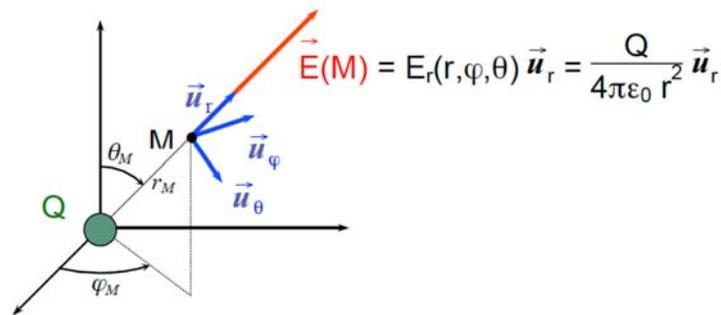
En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_x \vec{u}_x + \vec{E}_y \vec{u}_y + \vec{E}_z \vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques :

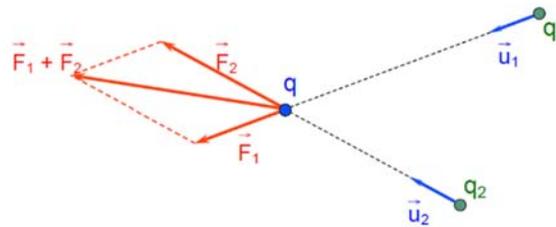
$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}_r \vec{u}_r + \vec{E}_\theta \vec{u}_\theta + \vec{E}_\varphi \vec{u}_\varphi$$

Exemple : champ créé par une charge ponctuelle $Q (>0)$:



II.5.2. Champ électrostatique créé par deux charges

En vertu de l'additivité des forces électrostatiques auxquelles est soumise une charge Q en présence de deux charges q_1, q_2 ;



On montre que la force totale s'écrit :

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 = q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = q\vec{E}_{tot}$$

Cela revient à considérer que la charge q est soumise à un champ électrostatique résultant

$$\vec{E}_{tot} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

Ce résultat peut être généralisé à n charges discrètes $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$: le champ résultant sera la somme des N champs individuels \vec{E}_i créés par les charges q_i .

$$\vec{E}_{tot} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Ceci représente le principe de superposition qui traduit la linéarité et l'additivité des champs électriques

II.5.3. Champ électriques créés par des distributions continues.

Dans le cas de ces distributions continues, chaque portion de ligne, surface ou volume portant la charge dq crée un champ élémentaire $d\vec{E}$. Pour obtenir le champ électrique total en un point M, il faut sommer (de façon continue) ces champs élémentaires sur l'ensemble de la ligne, de la surface ou du volume.

Ainsi, on a recourt à des intégrales :

$$\vec{E} = \int_{P \in L} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2} = \int_{P \in L} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2}$$

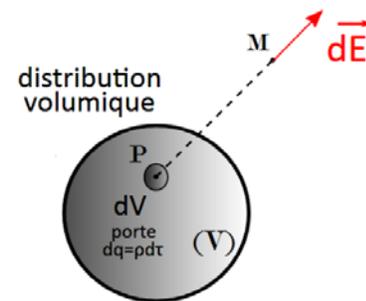
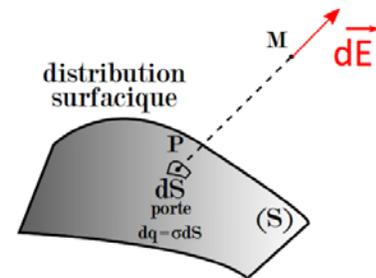
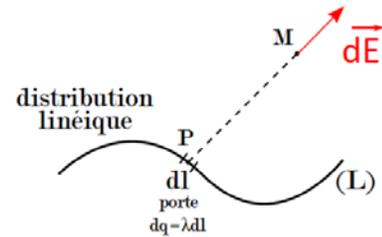
Avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$

$$\vec{E} = \iint_{P \in S} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2} = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2}$$

Avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$

$$\vec{E} = \iiint_{P \in V} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2} = \iiint_{P \in V} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2}$$

Avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$

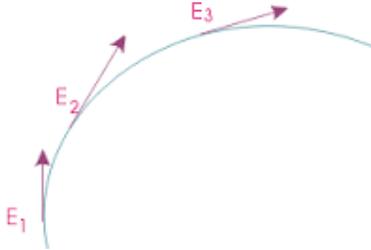


Remarque

Ces relations sont très générales et ne sont pas utilisables directement. Il convient d'abord d'analyser les symétries de la distribution de charges pour simplifier les calculs.

II.5.4. Lignes de champ

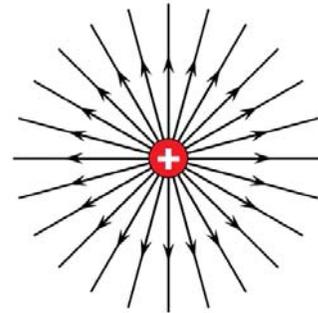
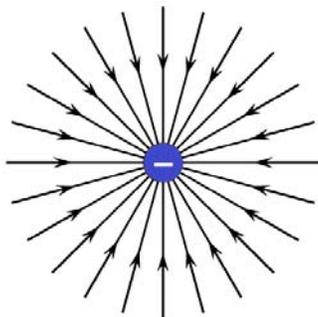
La présence d'un champ électrique n'est pas quelque chose de facile à visualiser. Grâce aux lignes de champ, on a une idée de la cartographie du champ électrique dans une portion d'espace. Une **ligne de champ** est une ligne orientée dans le sens du champ électrique, en chaque point de celle-ci, le champ électrique est tangent.



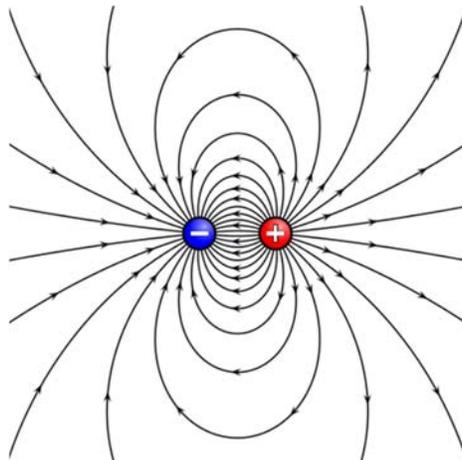
La valeur du champ \vec{E} peut varier le long d'une ligne de champ, les lignes de champ ne permettent donc de connaître que la direction du champ. Cependant, dans une région vide de charge, plus les lignes de champs sont serrées, plus le champ électrique est intense.

Exemples :

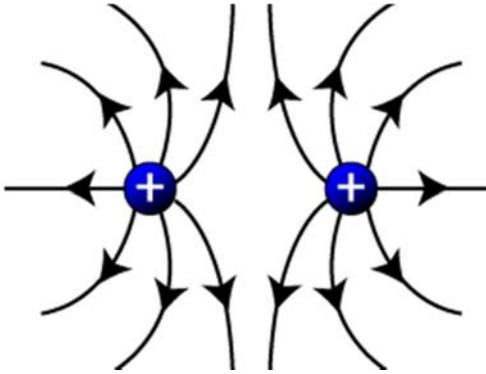
- Charges ponctuelles



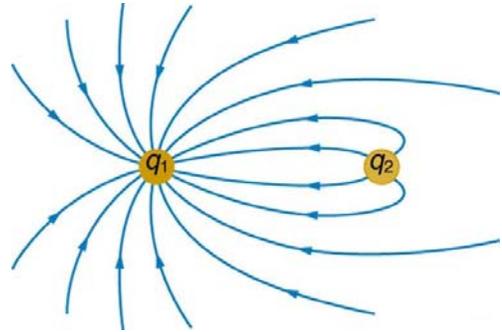
Dipôle :



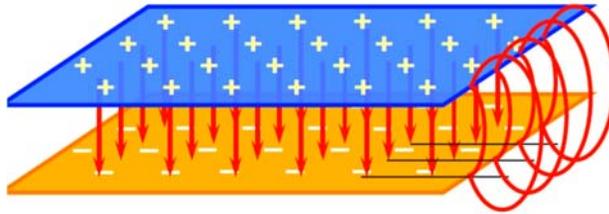
Ensemble de deux charges positives :



2 charges opposées et différentes en valeur absolue



Deux plans chargés :



Le champ est uniforme entre les deux plaques.

II.6. Potentiel électrostatique

Soit une charge q placée à l'origine d'un repère de coordonnées. Calculons la circulation de \vec{E} correspondant à un petit déplacement \overrightarrow{dM} à partir du point M :

$$dC = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = d\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K\right)$$

$$dC = -dV \text{ avec } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

Pour une charge unique, la circulation d'un point fictif en présence du champ \vec{E} est une différentielle totale :

$$dC = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM} = -dV \text{ Avec } dV = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \overrightarrow{dM}$$

On en déduit que pour une charge ponctuelle :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \text{ avec } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

II.6.1. Potentiel électrostatique créé par deux charges

$$V_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

II.6.2. Potentiel électrostatique créés par des distributions continues

$$V = \int_{P \in L} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_{P \in L} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{distribution volumique de charge}$$

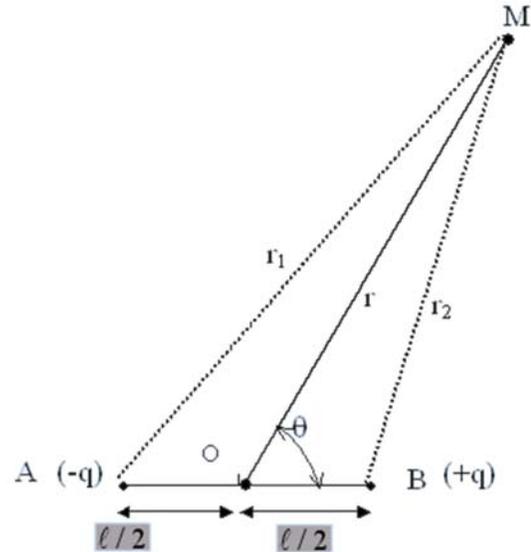
$$V = \iint_{P \in S} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{distribution surfacique de charge}$$

$$V = \iiint_{P \in V} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \iiint_{P \in V} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{distribution linéique de charge}$$

II.7. Dipôle électrostatique

II.7.1. Potentiel et champ créés à grande distance

La figure ci-contre fixe les notations utilisées dans tout ce qui suit. Si on se place en 3 dimensions, l'axe du doublet de charges représente un axe de symétrie cylindrique. Le plan méridien contenant l'axe Oz et le point M en lequel on cherche le potentiel et le champ est également un plan de symétrie. Le champ électrique suivra cette symétrie et sera contenu dans le plan méridien



II.7.2. Potentiel dipolaire

On peut calculer le potentiel en un point M quelconque en utilisant le principe de superposition. Ce potentiel sera la somme des potentiels créés par chacune des charges :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right)$$

L'expression de AM et BM en fonction des données du problème, par exemple r et theta a se calcule :

$$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$$

$$AM = \|\vec{AO} + \vec{OM}\|$$

$$AM = \sqrt{(\vec{AO} + \vec{OM})^2}$$

$$AM = \sqrt{AO^2 + OM^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM}}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)}$$

Pour BM, on obtient presque le même résultat, mais le vecteur BO étant dirigée vers les z négatifs, le produit scalaire négatif. On obtient :

$$BM = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)}$$

Ce qui donne une expression assez compliquée de $V(M)$:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)\right)^{1/2}} \right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta)\right)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

Mais ceci est l'expression complète, sans approximation. Si on veut tenir compte du fait qu'on se place loin du dipôle, c'est à dire pour $r \gg l$, on peut faire un développement au premier ordre qui donne un résultat particulièrement simple.

Développons $\frac{1}{AM}$ au premier ordre. On connaît le développement de $(1+x)^n$.

$$(1+x)^n = (1+nx) \quad \text{lorsque} \quad x \ll 1$$

Il est facile de transformer $\frac{1}{AM}$ pour obtenir une expression similaire, il suffit de mettre r^2 en facteur :

$$\frac{1}{AM} = \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{l}{2}r \cdot \cos(\theta) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{AM} = r^{-1} \left(1 + \left(\frac{l}{2r}\right)^2 + 2\left(\frac{l}{2r}\right) \cdot \cos(\theta) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Puisqu'on a $r \gg a$, le rapport $\left(\frac{a}{2}\right)/r$ est très petit. Donc on a bien une expression du type $(1+x)^n$

$$\frac{1}{AM} \approx r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2r}\right)^2 - \frac{1}{2} 2 \left(\frac{l}{2r}\right) \cdot \cos(\theta) \right)$$

de même pour $\frac{1}{BM}$

$$\frac{1}{BM} \approx r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} 2 \left(\frac{l}{2r} \right) \cdot \cos(\theta) \right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} 2 \left(\frac{l}{2r} \right) \cdot \cos(\theta) \right) - r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2r} \right)^2 - \frac{1}{2} 2 \left(\frac{l}{2r} \right) \cdot \cos(\theta) \right)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{r^2} \right) \cdot \cos(\theta)$$

Le produit $q \cdot a$ est la norme du moment dipolaire \vec{p} .

Donc le potentiel électrostatique $V(M)$ du dipôle peut se réécrire en fonction du moment dipolaire $p = \|\vec{p}\|$:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2}.$$

Champ électrostatique créé par un dipôle

Comme V ne dépend que de r et de θ , seules les composantes E_r et E_θ de \vec{E} seront non nulles.

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, donc :

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} \begin{cases} E_r = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

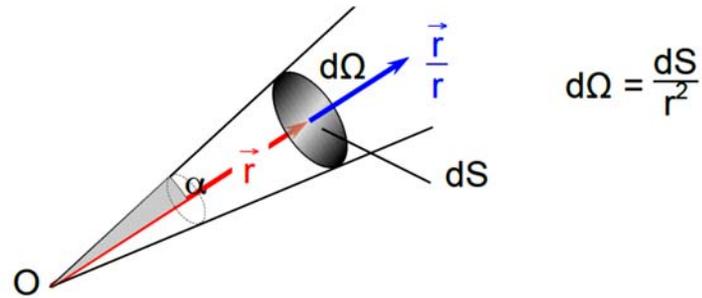
Conclusion :

Le champ créé par un dipôle est proportionnel à $\frac{1}{r^3}$ et le potentiel à $\frac{1}{r^2}$, alors que pour une charge ponctuelle, \vec{E} créé est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$ et V à $\frac{1}{r}$.

II.8. Flux du champ électrique.

II.8.1. Notion d'angle solide

L'angle solide $d\Omega$, délimité par un cône de demi-angle α coupant un élément de surface élémentaire dS situé à une distance r de son sommet O , vaut :



$d\Omega$:

- est toujours positif
- est indépendant de r puisque $dS \propto r^2$
- s'exprime en stéradian (sr)

Calcul d'un angle solide Ω d'ouverture α :

En coordonnées sphériques, l'élément de surface perpendiculaire à \vec{u}_r est

$$dS = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

On en déduit l'expression de $d\Omega$:

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

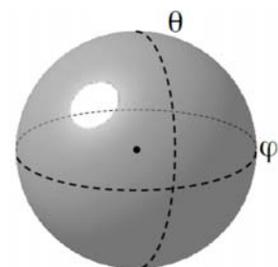
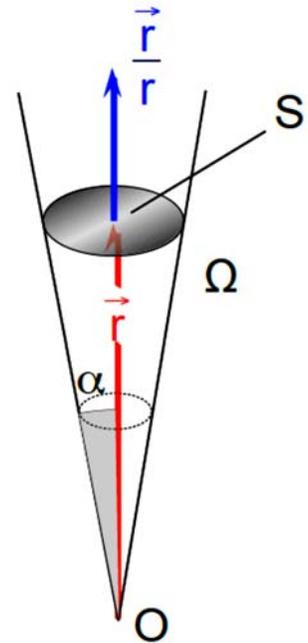
L'angle solide Ω d'ouverture est défini par :

$\phi : 0 \rightarrow 2\pi$ et $\theta : 0 \rightarrow \alpha$

D'où l'expression de Ω :

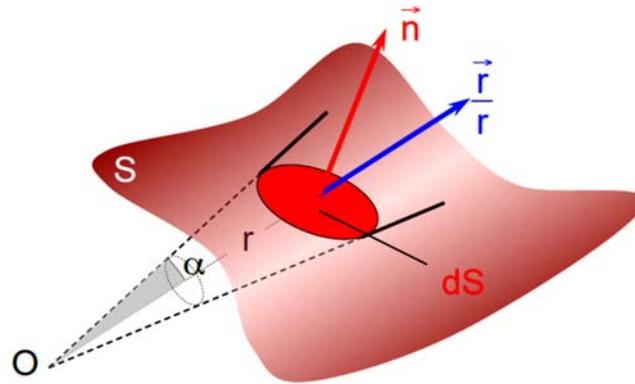
$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin(\theta) d\theta = 2\pi(1 - \cos \alpha)$$

Remarque : pour tout l'espace, $\theta : 0 \rightarrow \pi$
donc dans ce cas : $\Omega = 4\pi$.



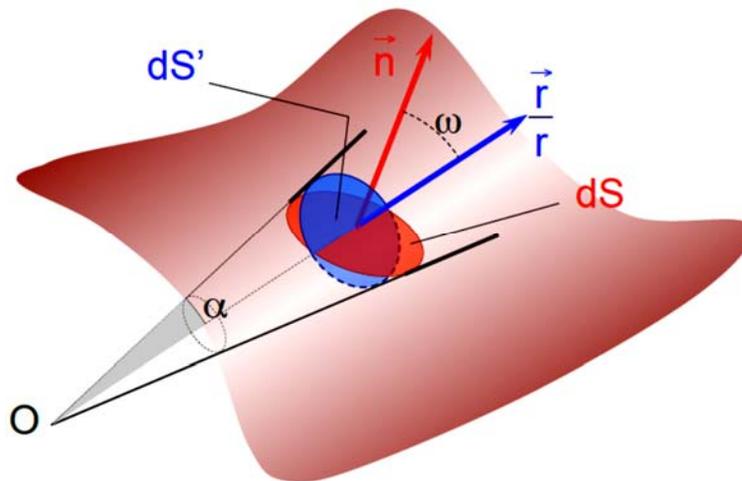
II.8.2. Surface interceptée par un angle solide

On considère une surface quelconque S et un angle solide interceptant cette surface :



La surface interceptée correspond à l'élément de surface dS . Cette surface élémentaire a pour normale \vec{n} .

On cherche à connaître le lien entre la surface interceptée par l'angle solide et la valeur de cet angle solide. On construit dS' , élément de surface perpendiculaire à \vec{r}/r



l'angle entre \vec{n} et \vec{r}/r est ω .

l'angle solide vaut : $d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$ avec $dS' = dS \cos \omega$

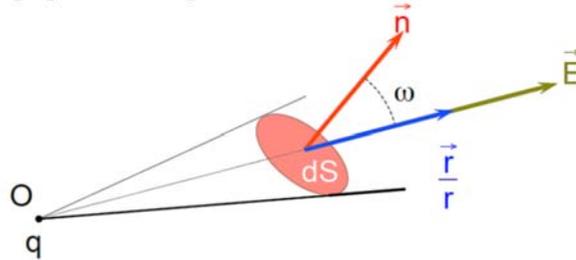
d'où finalement : $d\Omega = \frac{dS}{r^2} \cos \omega$

II.9. Théorème de Gauss

II.9.1. Notion de Flux

Flux du champ électrique à travers une surface quelconque

On considère une charge ponctuelle q en O et une surface élémentaire dS quelconque :



Le flux élémentaire $d\phi$ de \vec{E} à travers la surface dS est défini par la relation :

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Avec $E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

Donc $d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}$

Soit $d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2} \cos \omega$

D'où finalement : $d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$

Conséquences :

- Le flux de \vec{E} ne dépend que de l'angle solide sous lequel est vue la surface,
- Le flux de \vec{E} est indépendant de la distance surface – source :

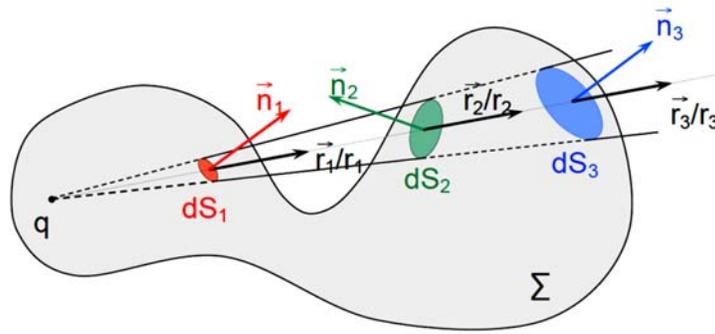
dS augmente en r^2 mais de \vec{E} diminue en $1/r^2$.

Flux total du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque fermée

On considère une charge ponctuelle q à l'intérieur d'une surface fermée Σ .

On cherche à calculer le flux élémentaire de \vec{E} à travers la surface Σ vue sous l'angle solide $d\Omega$.

L'angle solide en question intercepte la surface fermée Σ en définissant 3 surfaces élémentaires dS_1 , dS_2 et dS_3 ayant pour normales respectives \vec{n}_1 , \vec{n}_2 et \vec{n}_3 (normales sortantes).



Dans ce cas, le flux de \vec{E} est la somme d'un nombre impair (3) de flux élémentaires :

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3$$

$$d\phi = \vec{E}(\vec{r}_1) d\vec{S}_1 + \vec{E}(\vec{r}_2) d\vec{S}_2 + \vec{E}(\vec{r}_3) d\vec{S}_3$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dS_1}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1} \cdot \vec{n}_1 + \frac{dS_2}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \vec{n}_2 + \frac{dS_3}{r_3^2} \frac{\vec{r}_3}{r_3} \cdot \vec{n}_3 \right]$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [d\Omega - d\Omega + d\Omega] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Le flux total de \vec{E} à travers Σ et dans toutes les directions s'obtient en intégrant l'expression précédente sur les 4π stéradian :

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En vertu du théorème de superposition, ce résultat se généralise à un ensemble de n charges.

II.9.2. Théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée Σ est égal, dans le vide, à la charge électrique Q_{int} contenue dans le volume défini par la surface divisée par ϵ_0 .

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

où Q_{int} représente la charge totale contenue dans V :

$$Q_{int} = \sum_{i=1}^n q_i \quad \text{ou} \quad Q_{int} = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$$

II.10. Equilibre électrostatique des conducteurs chargés

II.10.1. Définition d'un conducteur

C'est un milieu dont les porteurs de charges libres peuvent se mettre en mouvement sous l'action d'une force.

Définition d'un conducteur en équilibre

Un conducteur est dit en équilibre, si toutes ses charges libres sont immobiles.

Propriétés d'un conducteur en équilibre

Le champ électrostatique :

Le Champ intérieur est $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, en effet toute charge q est au repos, donc :

$$\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{0}$$

Le potentiel est constant $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0} \rightarrow V = cte$

La distribution des charges électriques ne peut être que surfacique :

Considérons un conducteur chargé en équilibre. Appliquons le théorème de Gauss en un point M du conducteur :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{puisque } \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \rho = 0$$

Donc la charge du conducteur ne peut être que surfacique, avec une densité σ .

II.10.2. Champ au voisinage d'un conducteur- Théorème de Coulomb

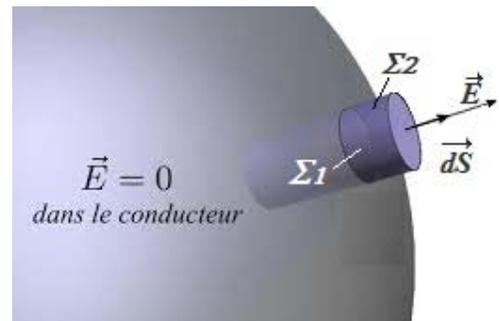
Soit un point M très voisin de la surface S du conducteur. Appliquons le théorème de Gauss à un tube de force ΣS (volume limité par des lignes de champ et de base dS). La surface latérale du tube est notée $\Sigma 2$. Limitons ce tube par une section droite passant par M et dont la surface est égale à dS (M très voisin de S).

Le flux du champ électrique sortant de Σ est :

$$d\phi = (d\phi)_{\Sigma 1} + (d\phi)_{\Sigma 2} + (d\phi)_{ds} = \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS}$$

En effet à l'intérieur du conducteur, $\vec{E}_i = \vec{0}$ et $(d\phi)_{\Sigma 1}$

de même sur toute la surface de $\Sigma 2$, \vec{E} est tangent et $(d\phi)_{\Sigma 2} = 0$ Le théorème de Gauss appliqué à Σ donne



$$d\phi = \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = E(M) \cdot ds = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0}$$

$$\text{D'où : } \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Cette relation exprime *le théorème de Coulomb*.

Remarques

- Le champ électrique au voisinage immédiat d'un conducteur ne dépend que de la densité de répartition de charges.
- Le champ électrique est discontinu à la traversée d'un conducteur, puisque il est nul à l'intérieur et vaut σ/ϵ_0 juste à l'extérieur.

Application.

Calcul du champ d'un conducteur sphérique de centre O et de rayon R.

- **Cas : $r < R$** $\vec{E}_1 = \vec{E}_1 = \vec{0}$ (pas de charge à l'intérieur de la surface de Gauss)
- **Cas : $r > R$** Le champ électrique \vec{E}_2 en un point M éloigné de la surface est donné par :

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

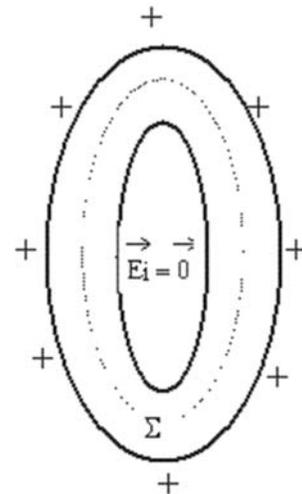
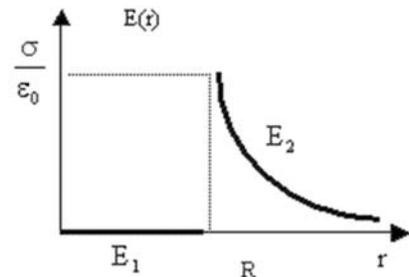
Soit

$$E_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{n}$$

On remarque que :

$$(E_2)_{r \rightarrow R^+} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$(E_2)_{r \rightarrow R^-} = 0$$



II.10. 3. Propriétés électriques d'un conducteur creux

On considère un conducteur creux, on montre qu'à l'intérieur de la cavité lorsque celle-ci ne renferme aucune charge électrique, les propriétés du champ et du potentiel électriques sont les mêmes qu'à l'intérieur d'un conducteur massif. En effet, la surface de la cavité est une surface équipotentielle, on en déduit que V est constant à l'intérieur de la cavité et égal au potentiel du conducteur.

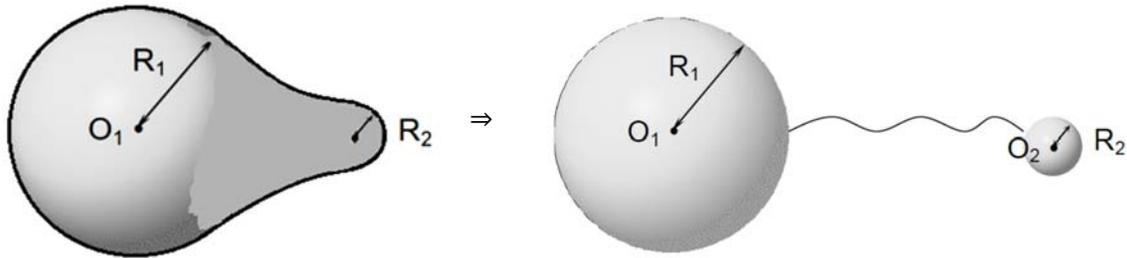
D'après la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, le champ est nul à l'intérieur de la cavité $\vec{E} = \vec{0}$, il en est de même à l'intérieur du conducteur. La charge à l'intérieur du conducteur est nulle ($\rho_i = 0$) ($r_i = 0$). En effet, si on applique le théorème de Gauss à la surface fermée Σ on a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0} \quad \text{Avec } \vec{E}_i = \vec{0} \quad \text{ce qui donne } Q_i = 0$$

Donc la charge est répartie uniquement sur la surface externe du conducteur creux.

II.10.4. Pouvoir des pointes

Nous allons montrer qu'à proximité d'une pointe, le champ électrique est très intense. Considérons deux sphères conductrices de rayons respectifs R_1 et R_2 portées au même potentiel (reliées par un fil conducteur). Les deux sphères ont une densité de charge uniforme σ_1 et σ_2 .



$$V(O_1) = V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma_1 dS}{R_1}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0}$$

$$V(O_2) = V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma_2 dS}{R_2}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$$

Puisque les potentiels sont égaux : $V_1 = V_2$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

Si $R_1 \gg R_2$, alors $\sigma_2 \gg \sigma_1$

À potentiel égal, la densité de charges d'un conducteur chargé est plus importante sur la surface ayant une courbure forte (petit rayon) que sur la surface ayant une courbure faible (grand rayon).

II.10.5. Capacité propre d'un conducteur

Soit un conducteur C isolé. Considérons un premier état d'équilibre (état1), tel que le potentiel de C est V_1 et sa charge est Q_1 . Soit un deuxième état d'équilibre (état 2), obtenu par superposition de λ «états 1» :

Etat 1	Etat 2
V_1, Q_1	$V_2 = \lambda V_1, Q_2 = \lambda Q_1$

On obtient une relation entre la charge et le potentiel : $\frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = C_0$

La charge Q d'un conducteur seul dans l'espace est proportionnelle à son potentiel V :

$$Q = C_0 V$$

C_0 est appelée capacité propre du conducteur. Elle ne dépend que de la forme et des dimensions du conducteur et s'exprime en Farad. (Symbole : F)

Exemple. Capacité d'un conducteur sphérique

Soit un conducteur sphérique de centre O, de rayon R et de charge Q. Le potentiel du conducteur peut être trouvé à partir du potentiel $V(O)$ au centre de la sphère :

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{r=R} \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\iint \sigma dS}{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

D'où

$$C_0 = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Si on considère la terre comme un conducteur sphérique de rayon = 6400 km, sa capacité est :

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{6.4 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} = 0.71 \cdot 10^{-3} F \quad \text{soit } 0.71 \text{ mF}$$

II.10.6. Phénomène d'influence

Influence subie par un conducteur isolé

Soit A un conducteur isolé ne portant aucune charge :

$$Q = 0, V = 0 \text{ et } \vec{E} = \vec{0}.$$

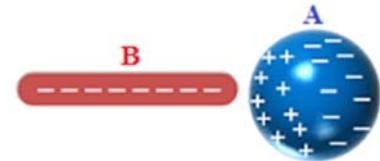
On approche de A un corps B chargé négativement.

A influencé par B :

des charges (+) apparaissent sur la partie de A proche de B et des charges (-) sur la partie la plus éloignée.

- modification de la répartition des charges sur la surface de A,
- A étant isolé donc sa charge reste constante égale à sa valeur initiale.

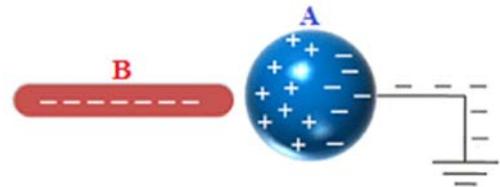
Le phénomène d'influence ne modifie pas la charge totale d'un conducteur isolé, mais modifie uniquement la répartition de cette charge sur sa surface et donc son potentiel.



Influence subie par un conducteur maintenu à un potentiel constant

Le conducteur A est , maintenant, relié à un générateur qui maintient son potentiel constant ou bien à la terre dont le potentiel est nul.

Lorsqu'on approche de A le corps B chargé négativement, il apparaît que des charges (+) sur A, alors qu'il y'a déplacement des charges (-) vers la terre.



Dans ce cas, le phénomène d'influence ne modifie pas le potentiel du conducteur, mais modifie sa charge totale et la répartition de cette charge.

L'influence totale.

L'influence totale apparaît lorsque le conducteur influencé (B) entoure le conducteur influençant (A).



1. *B isolé et initialement neutre*

$$Q_{int} = -Q \text{ et } Q_{ext} = +Q$$

Il apparaît sur la face externe la charge +Q

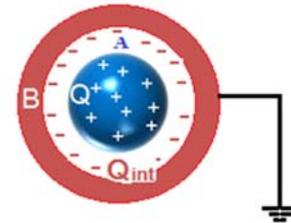


2. *B isolé et porte initialement une charge Q'*

Il apparaît sur sa face externe la charge Q + Q'

3. *B relié au sol*

Aucune charge sur sa face externe.



Capacités et coefficients d'influence d'un système de conducteurs en équilibre électrostatique

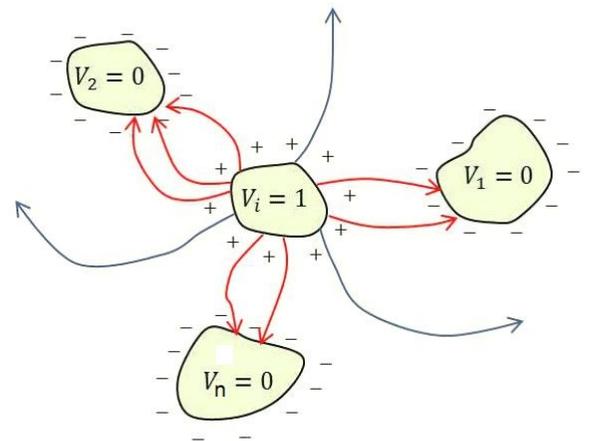
Considérons n conducteurs portés aux potentiels V_1, V_2, \dots, V_n ; et portant les charges Q_1, Q_2, \dots, Q_n . On montre que les charges Q_1, Q_2, \dots, Q_n sont des fonctions linéaires des potentiels des conducteurs :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1n}V_n$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{2n}V_n$$

.

$$Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \dots + C_{nn}V_n$$



Les coefficients C_{ij} sont les coefficients d'influences entre conducteurs : $C_{ij} = C_{ji} < 0$, les coefficients C_{ii} sont les capacités des conducteurs en présence des autres conducteurs : $C_{ii} > 0$. La capacité C_{ii} du conducteur i en présence des autres conducteurs est différente de sa capacité C_i lorsqu'il est seul.

II.11. Les condensateurs

Un condensateur est formé de deux conducteurs en influence totale. Les deux conducteurs sont appelés armatures du condensateur.

On appelle charge du condensateur, la charge Q de son armature interne. Soient V_1 et V_2 les potentiels respectifs des armatures interne et externe.

Le rapport $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$ est appelé capacité du condensateur

Représentation symbolique : 

II.11.1. Calcul de capacités

a) Méthode de calcul de capacités

1. En utilisant le théorème de Gauss, on calcule le champ E entre les armatures,
2. On calcule la circulation du champ d'une armature à l'autre, $V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$
3. Connaissant la charge $Q = \iint_S \sigma ds$,

$$\text{On calcule } C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

b) Le condensateur plan

Il est constitué de deux plans infinis portés aux potentiels V_1 et V_2 et distant de d .

Entre les armatures E est uniforme : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

Calculons la circulation de champs électrique :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_1 - V_2 = E \cdot d$$

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

D'autre part une portion du conducteur de surface S porte la charge $Q = \sigma \cdot S$

Donc :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0 \cdot S}$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S} = \frac{V_1 - V_2}{d} \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Pour augmenter C il faut remplacer le vide par de la matière, c'est-à-dire ϵ_0 par ϵ_r .

II.11.2. Associations de condensateurs

a) Association en série

Dans ce groupement tous les condensateurs portent la même charge Q ,

Le Condensateur équivalent aura la même charge Q sous la d.d.p V de l'ensemble en série.

Sa capacité C_{eq} est donnée par :

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

b) Association en parallèle

Dans ce groupement tous les condensateurs ont la même d.d.p V à leurs bornes.

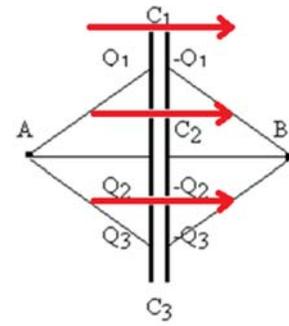
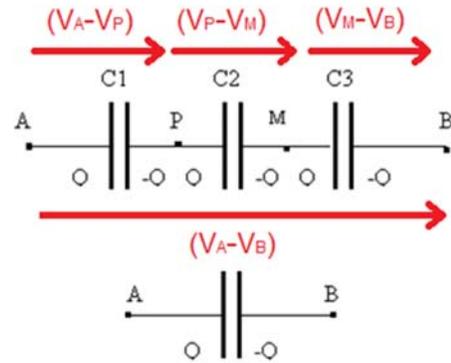
Le Condensateur équivalent aura la charge $Q=Q_1+Q_2+Q_3$ sous la d.d.p V .

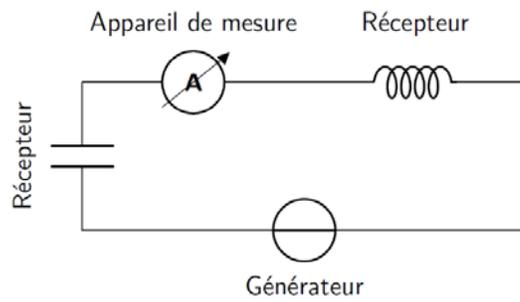
Sa capacité C_{eq} est donnée par :

$$Q = C_{eq}V = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1Q + C_2Q + C_3Q \rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Pour un groupement en parallèle de n condensateurs, la capacité du condensateur équivalent sera :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$





III. ELECTROCINETIQUE

III - Electrocinétique

Les charges étudiées en électrostatique sont des charges immobiles. Qu'elles soient liées à l'atome ou qu'elles soient « libres », l'équilibre électrostatique implique qu'elles restent fixes. Quand on veut étudier les charges mobiles, on doit introduire un autre champ, le champ magnétique \vec{B} et aussi une densité de courant \vec{j} rendant compte du déplacement des charges. Relier cette densité de courant \vec{j} en un point d'un conducteur, au champ électrique \vec{E} en ce point, constitue le but de l'électrocinétique.

III.1. Courant et résistance électriques

Pour étudier le courant électrique, on commence avec un condensateur chargé, comme montre la figure. On peut vérifier que des charges sont présentes sur chaque armature en approchant des isolants chargés comme dans les expériences du 1^{er} chapitre (électrostatique). Si on relie les deux armatures à l'aide d'un fil conducteur, le conducteur se décharge rapidement. Les charges se déplacent d'une armature à l'autre : un *courant électrique* est produit.



III.1.1. Le courant électrique

Un courant électrique est la grandeur algébrique correspondant à la circulation de porteurs de charges mobiles (p.c.m.) électriques dans un conducteur.

Sens conventionnel du courant électrique

Par convention, le sens réel du courant est le sens de déplacement des charges + Dans un conducteur métallique le courant électrique correspond à un déplacement délectrons Le déplacement des charges (électrons) est donc de sens opposé à celui du courant.

III.1.2. Vecteur densité de courant

Sous l'action d'un champ électrique \vec{E} , chaque électron acquiert une vitesse. En désignant par \vec{v} , la *vitesse moyenne* de l'ensemble des électrons (on dit aussi *vitesse d'entraînement* ou

de dérive), et par ρ la charge volumique du milieu, on définit le vecteur de courant en tout point du milieu par :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

Ou encore, puisque $\rho = -ne$ où n est le nombre d'électrons par unité de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron :

$$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

III.1.3. L'intensité du courant électrique

Soit ϕ le flux de \vec{j} à travers une surface (S) orientée

On a :

$$\phi = \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Le flux élémentaire

$$d\phi = \vec{j} \cdot \vec{dS} = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

Représente la charge contenue dans le volume du cylindre de longueur v s'appuyant sur dS ; c'est aussi la charge qui traverse dS pendant l'unité de temps.

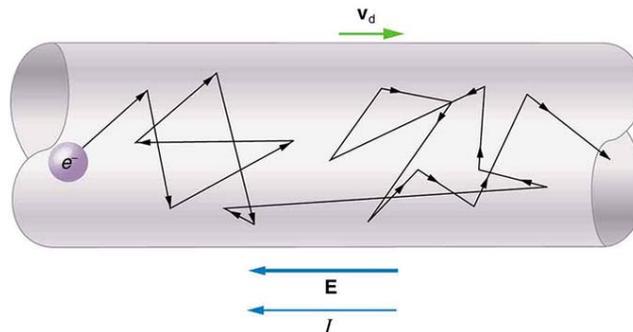
On peut donc écrire :

$$\int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \frac{dQ}{dt} = I$$

Définissant ainsi l'intensité du courant qui traverse (S), laquelle s'exprime en **Ampère (A)** : $1A = 1C \cdot s^{-1}$

III.2. Loi d'Ohm microscopique (ou locale)

Dans les champs électriques \vec{E} , la charge q est soumise à la force $q\vec{E}$ et, de la part milieu cristallin, ionique ou électrolytique dans lequel elle évolue, à une force $-\mathbf{k}\vec{v}$ qui s'oppose à la vitesse.



D'où l'équation différentielle de son mouvement :

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - k\vec{v}$$

Qui a pour solution :

$$\vec{v}(t) = \left(1 - e^{-kt/m}\right) \cdot \frac{q\vec{E}}{k}$$

Soit, pour des dates grandes par rapport à m/k mais petites pour nos moyens d'investigation,

$$\vec{v}(t) \approx \vec{v} = \frac{q\vec{E}}{k} = \mu\vec{E}$$

Où μ est la mobilité de la charge électrique. Le vecteur densité de courant atteint, lui, la valeur limite :

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = \frac{\rho q\vec{E}}{k} = \frac{nq^2}{k}\vec{E}$$

où n (n en m^{-3}) est la densité particulaire des porteurs de charge q .

\vec{j} peut être mise sous la forme :

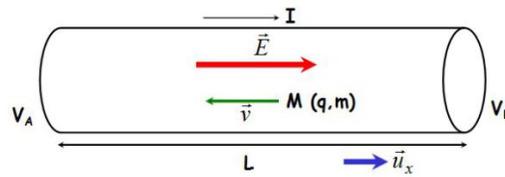
$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

qui est la loi d'ohm microscopique.

γ est la conductivité électrique du milieu, inverse de sa résistivité (attention) elle-aussi notée souvent ρ ($\gamma = 1/\rho$).

III.3. Loi d'Ohm macroscopique (Résistance d'un conducteur)

Considérons maintenant une portion AB d'un conducteur parcouru par un courant I . S'il existe un courant, cela signifie qu'il y a une chute de potentiel entre A et B,



$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

On définit alors la résistance de cette portion par

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \gamma \vec{E} \cdot d^2\vec{S}}$$

où l'unité est l'Ohm (symbole Ω). Dans le cas simple d'un conducteur filiforme de section S où, sur une longueur L , le champ électrostatique est uniforme, on obtient le lien entre la résistance d'un conducteur (propriété macroscopique) et sa résistivité (propriété microscopique)

$$R = \frac{EL}{\gamma ES} = \eta \frac{L}{S}$$

qui montre que les unités de la résistivité sont le Ωm (Ohm mètre).

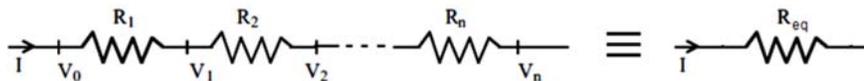
La d.d.p. appliquée aux bornes d'un générateur est égal au produit de la résistance présentée par ce récepteur et de la valeur de l'intensité du courant traversant ce même récepteur.

$$U = R \cdot I$$

III.4. Associations de résistances

Résistances en série

Soient n résistances R_i mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant I . La tension aux bornes de la chaîne est simplement



$$U = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n)$$

$$U = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I$$

C'est à dire analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est

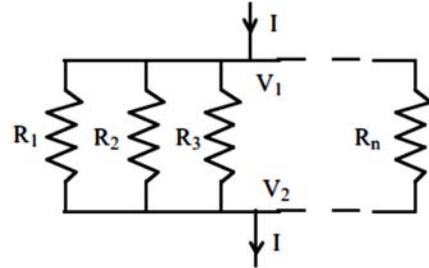
$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Résistances en parallèle

Soient n résistances R_i mises en parallèle sous une tension $U = V_1 - V_2$ et alimentées par un courant I .

Le courant se sépare alors en n courants

$$I_i = \frac{U}{R_i}$$



Dans chacune des n branches. En vertu de la conservation du courant (voir ci-dessous), on a

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i} = \frac{U}{R}$$

C'est à dire que l'ensemble des n branches est analogue à une résistance équivalente en série

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

La puissance.

La puissance absorbée ou fournie par un dispositif ou un système électrique peut se calculer en fonction de l'intensité du courant et de la tension.

$$P = U \cdot I$$

Sachant que :

$$U = R \cdot I$$

$$P = (R \cdot I) \cdot I$$

On peut dire que :

$$P = R \cdot I^2$$

P : Puissance électrique en watts ;

I : Courant électrique en ampère ;

R : résistance électrique.

Sachant aussi que :

$$P = U \cdot I \quad \text{et que} \quad I = \frac{U}{R}$$

On peut dire que : $P = U \cdot \frac{U}{R}$

Soit $P = \frac{U^2}{R}$

U : d. d. p. en volt

III.5. L'énergie.

Pour qu'une certaine puissance transforme de l'énergie, elle doit être utilisée pendant un certain temps. Ainsi un moteur d'une puissance suffisante pour entraîner une charge considérable ne produit une transformation d'énergie que s'il est mis en marche pendant une certaine période de temps. Plus longtemps fonctionne un moteur, plus grande est la quantité d'énergie dépensée.

L'énergie perdue ou gagnée par un dispositif se détermine au moyen de la relation :

$$W = P \cdot t$$

W : l'énergie en watts-secondes (Ws) ou en joule (J) ;

P : la puissance en watts (W) ;

T : le temps en secondes (s).

Puisque la puissance se mesure en watts (ou en joules par seconde) et le temps en secondes, l'unité de mesure de l'énergie est le watt-seconde ou le joule comme indiqué ci-dessus. Le watt-seconde est toutefois une unité trop petite pour être commode ; aussi on utilise couramment le watt-heure (Wh) ou le kilowattheure (kWh).

$$\text{Energie (watts – secondes)} = \text{puissance (watts)} \times \text{temps(secondes)}$$

$$\text{Energie (kilowattheures)} = \text{puissance (watts)} \times \text{temps (heures)}/1000$$

L'énergie électrique fournie par ce service commercial (Electrabel) se mesure au moyen d'un instrument appelé watt-heuremètre ou compteur d'électricité. Cet appareil se raccorde directement aux lignes du secteur immédiatement en amont du panneau de distribution des immeubles.

La consommation d'électricité se mesure en kilowattheures.

III.6. La loi de Joule

On appelle effet joule, le dégagement de chaleur qui accompagne toujours le passage du courant électrique dans un conducteur. D'après la loi de Joule, la quantité de chaleur dégagée dans un conducteur est fonction de l'intensité du courant, du temps de passage de ce courant et la valeur de la résistance du conducteur.

$$W = R \cdot I^2 \cdot t$$

III.7. Circuit électrique

III.7.1. Le Circuit

En reliant les bornes d'un générateur entre elles par un ou plusieurs matériaux conducteurs, on réalise un circuit fermé, dans lequel le courant électrique peut circuler.

Le circuit électrique peut contenir un certain nombre d'appareils aux propriétés différentes :

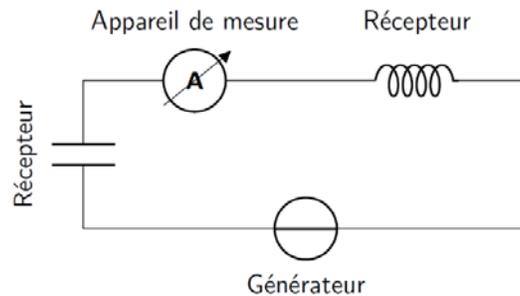
Générateurs : batteries, générateurs de tension, piles. . .

Récepteurs : résistances, bobines, condensateurs. . .

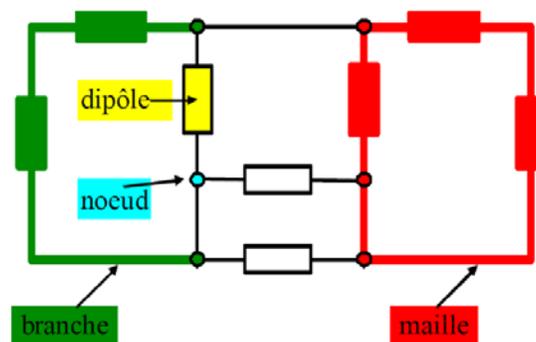
Appareils de mesure : voltmètres, ampèremètres, oscilloscopes. . .

Appareils de sécurité : disjoncteurs, fusibles. . .

Appareils de manœuvre : inverseurs. . .



Un réseau électrique est constitué d'un ensemble de dipôles linéaires ; ceux-ci sont reliés par des fils de résistance négligeable. Le réseau est formé de branches, reliées entre elles par des nœuds, et formant des mailles. L'ensemble est appelé graphe du réseau.



Dipôle : Tout ensemble d'éléments électriques situés entre deux **nœuds**.

Branche : Ensemble de dipôles placés en série entre deux nœuds.

Maille : Ensemble de branches constituent une boucle fermée.

III.7.2. Force électromotrice et générateur

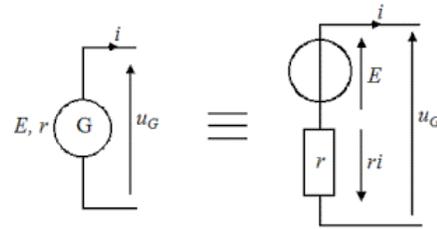
C'est un dispositif capable de délivrer un courant dans le circuit extérieur sous une tension généralement continue. Il existe plusieurs types de générateur :

- Générateur électrostatique
- Générateur électrochimique (pile)

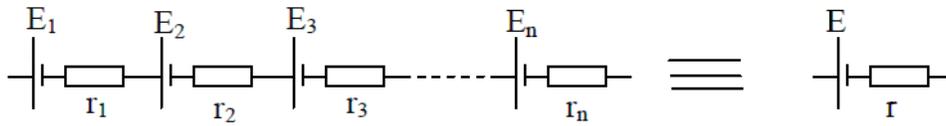
Quel que soit le type de générateur, il présente à ses bornes une f.é.m. ou DDP qui s'exprime en volt.

Schéma équivalent

On peut représenter un générateur par un circuit équivalent constitué d'une f.é.m. en série avec une résistance r , appelée résistance interne du générateur.



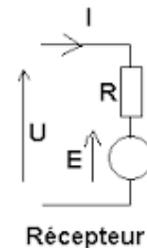
Association des générateurs



$$R = \sum R_i \quad \text{et} \quad r = \sum r_i$$

III.7.3. Force contre électromotrice d'un récepteur

Les récepteurs sont des appareils qui ont pour but de transformer l'énergie électrique en une autre forme d'énergie (moteur, accumulateur en charge...). On ne peut réaliser cette opération sans perte d'énergie par effet joule dans le récepteur de résistance r .



III.8. Lois De Kirchhoff

Les deux lois fondamentales de la théorie des circuits :

- sont indépendantes de la nature des éléments constituant le circuit ;
 - expriment les contraintes imposées par la manière dont les éléments sont interconnectés ;
- ⇒ Sont fixées par la topologie du circuit.

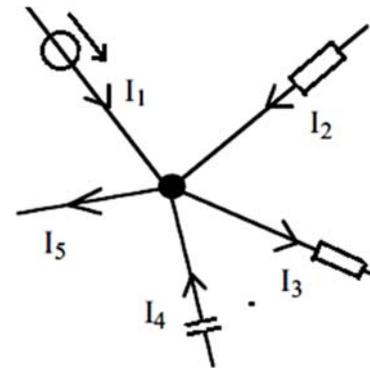
Deux hypothèses :

- pas d'accumulation de charges aux nœuds ni dans les éléments d'un circuit
- égalité entre tension et différence de potentiel.

III.8.1. Loi des nœuds (conservation du courant)

Soit un nœud quelconque du circuit sur lequel arrive un certain nombre de fils. Sur chacun de ces fils, circule un courant. En régime permanent, la conservation de la charge électrique se traduit par la conservation du courant : en aucun point du circuit il ne peut y avoir accumulation (ou perte) de charges. Cela signifie donc que l'ensemble des courants entrants compense exactement les courants sortants,

$$\sum I_{entrants} = \sum I_{sortants}$$



$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

Ceci constitue la loi des nœuds ou l'équation aux nœuds.

III.8.2. Loi des mailles (conservation de l'énergie)

Soit une maille d'un circuit constituée de n branches. L'équation aux branches pour la k-ième branche s'écrit

$$U_k = R_k I_k - e_k$$

où R_k , I_k et e_k sont respectivement la résistance totale, le courant et la fém. contenues dans cette branche. La conservation de l'énergie pour cette maille s'exprime par le fait que, partant du nœud 1 et revenant à ce nœud, on retrouve le même potentiel, c'est-à-dire

$$V_1 - V_1 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_{n-1} - V_n) = U_1 + \dots + U_n = 0$$

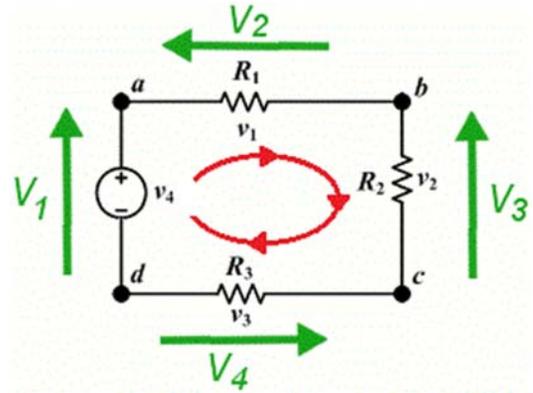
La loi des mailles (ou équation de maille) s'exprime tout simplement par

$$\sum_k (R_k I_k - e_k) = 0$$

Exemple

Le schéma ci-contre représente un circuit électrique fermé. Les différences de potentiel, aussi appelé tension, sont représentés en vert. La boucle rouge représente le sens dans lequel seront listées les tensions.

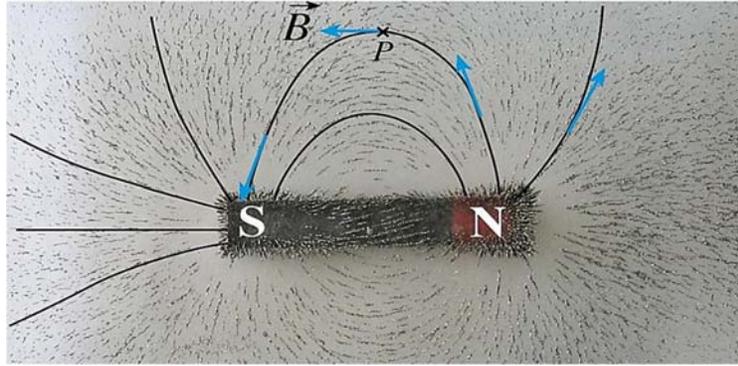
En suivant la boucle (rouge) et en faisant attention au sens, les tensions peuvent être listées comme ceci :



$$+V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 0$$

L'équation ci-dessous utilise un signe positif lorsque la différence de potentiel est dans le même sens que la boucle (en rouge). De même, les tensions qui sont dans le sens opposés à la boucle (en rouge) sont ajoutées avec un signe négatif. De ce fait, la formule peut aussi être présentée comme ceci :

$$V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 0$$



VI. ELECTROMAGNETISME

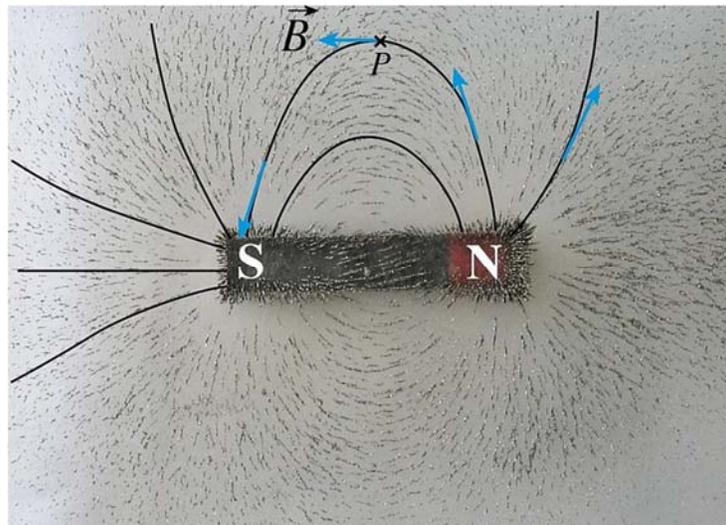
VI - Electromagnétisme

VI. Electromagnétisme

Le magnétisme se manifeste par exemple lorsqu'un aimant attire un clou en fer. C'est un phénomène distinct de la gravitation, laquelle est une interaction due à la masse des corps. En effet, **les phénomènes liés à l'électricité et au magnétisme ont la même cause : la charge électrique**. Ils sont réunis sous l'appellation plus générale d'électromagnétisme. L'étude de l'électromagnétisme comprend les notions de champ magnétique, de force magnétique, de force magnétique de Lorentz et de force électromagnétique de Laplace, d'induction électromagnétique.

VI.1. Champ magnétique

Au voisinage d'un barreau aimanté, la limaille de fer forme une configuration caractéristique qui montre l'influence de l'aimant sur le milieu environnant. C'est à partir de ces configurations que Michael Faraday eut l'idée d'introduire la notion du champ magnétique et les lignes de champ correspondantes. Le **champ magnétique** \vec{B} en un point est dirigé selon la tangente à une ligne de champ. Le sens de \vec{B} est celui de la force agissant sur le pôle Nord d'un barreau aimanté et correspond à la direction vers laquelle pointe l'aiguille d'une boussole. L'intensité du champ est proportionnelle au nombre de lignes traversant une surface unitaire normale au champ.



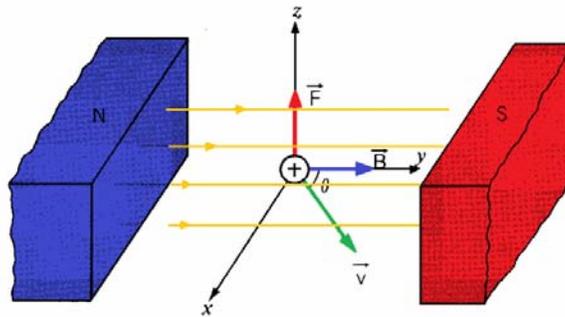
VI.2. Force de Lorentz

La définition du champ électrique est assez simple. Si \vec{F} est la force agissant sur une charge électrique *stationnaire* q placée dans le champ, le champ électrique est $\vec{E} = \vec{F}/q$, c'est-à-dire la force par charge unitaire. Mais puisqu'il n'est pas possible d'isoler un pôle, la définition du champ magnétique n'est pas aussi simple. En examinant l'effet d'un champ magnétique sur une charge électrique, on constate :

Une charge q soumise à un champ électromagnétique subit une force constituée de deux parties :

Une partie électrique, il s'agit de la force de Coulomb : $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$;

Une partie magnétique, qui s'écrit : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$;



L'ensemble de ces deux forces constitue la force de Lorentz :

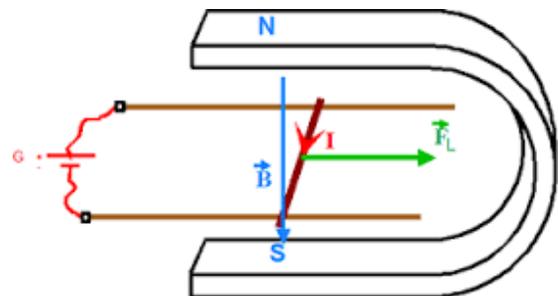
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Avec \vec{F} la force de Lorentz (N), q la charge qui subit la force (C), \vec{E} le champ électrique ($\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$), \vec{v} la vitesse de la particule ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et \vec{B} le champ magnétique (Tesla (T)).

La force sur un conducteur parcouru par un courant

On place une tige cylindrique et conductrice sur deux rails, entre les pôles d'un aimant en U.

- On fait passer un courant dans la tige :
elle se déplace.
- On inverse le sens du courant :
elle se déplace en sens inverse.
- On permute les pôles de l'aimant :
elle se déplace en sens inverse



Une portion de circuit électrique parcourue par un courant électrique, placé au voisinage d'un aimant convenablement orienté, est soumise à une force électromagnétique dont le sens dépend du sens du courant.

VI.3. Loi de Laplace

La force électromagnétique \vec{F} exercée par un champ magnétique uniforme \vec{B} sur une portion de conducteur rectiligne de longueur l , parcourue par un courant électrique d'intensité I s'écrit :

$$\vec{F} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

Où \vec{l} est un vecteur de longueur l , parallèle au conducteur et orienté dans le sens du courant.

Les caractéristiques de la force de Laplace sont :

Direction \vec{F} est perpendiculaire à \vec{l} et à \vec{B} ;

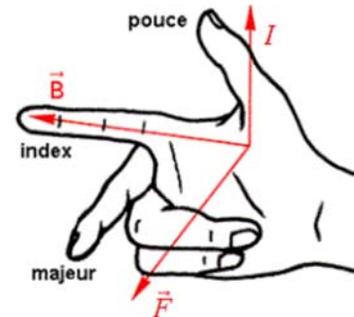
Sens déterminé à l'aide de la règle de la main droite :

Pouce \rightarrow sens de I

Index \rightarrow sens du champ magnétique \vec{B}

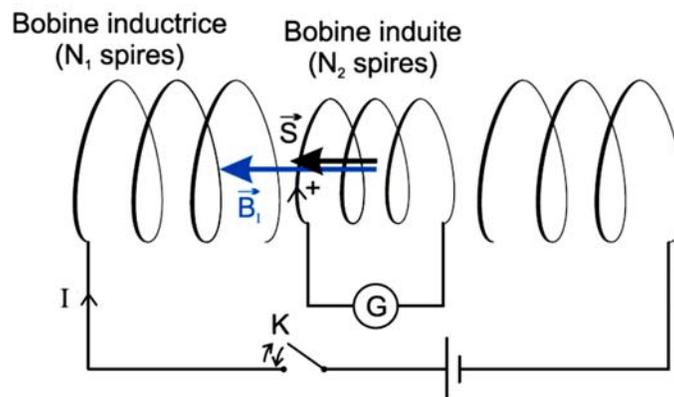
Majeur \rightarrow sens de la force de Laplace \vec{F}

Intensité $F = |I \sin \alpha| l B$, où α est l'angle formé par \vec{l} et \vec{B} .



VI.4. Loi de Faraday

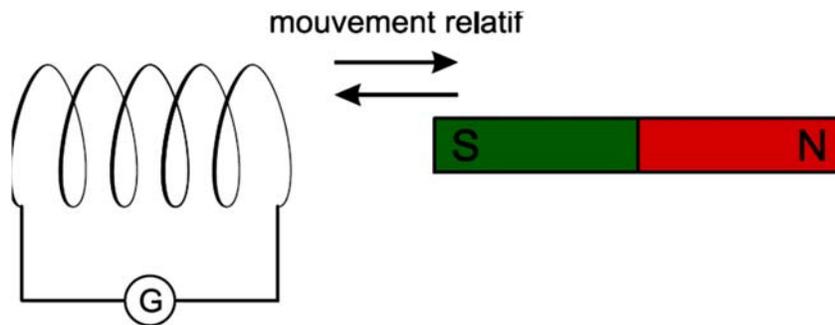
Expérience 1 :



On enroule sur un même cylindre deux fils électriques. L'un est relié à une pile et possède un interrupteur, l'autre est seulement relié à un galvanomètre, permettant ainsi de mesurer tout

courant qui serait engendré dans ce second circuit. En effet, Faraday savait que lorsqu'un courant permanent circule dans le premier circuit, un champ magnétique serait engendré et il s'attendait donc à voir apparaître un courant dans le deuxième circuit. En fait rien de tel n'était observé : lorsque l'interrupteur était fermé ou ouvert, rien ne se passait. Par contre, lors de son ouverture ou de sa fermeture, une déviation fugace de l'aiguille du galvanomètre pouvait être observée (cela n'a pas été perçu immédiatement). Une telle déviation pouvait également s'observer lorsque, un courant circulant dans le premier circuit, on déplaçait le deuxième circuit.

Expérience 2 :



Prenons un aimant permanent et plaçons-le à proximité d'une boucle constituée d'un fil conducteur relié à un galvanomètre. Lorsque l'aimant est immobile, il n'y a pas de courant mesurable dans le fil. Par contre, lorsqu'on déplace l'aimant, on voit apparaître un courant dont le signe varie selon qu'on approche ou qu'on éloigne l'aimant. De plus, ce courant est d'autant plus important que le déplacement est rapide. Ces deux types d'expériences ont amené Faraday à écrire ceci : « Quand le flux du champ magnétique à travers un circuit fermé change, il apparaît un courant électrique. »

Dans les deux expériences, si on change la résistance R du circuit, alors le courant I apparaissant est également modifié, de telle sorte que $U=RI$ reste constant. Tous les faits expérimentaux mis en évidence par Faraday peuvent alors se résumer ainsi :

Loi de Faraday :

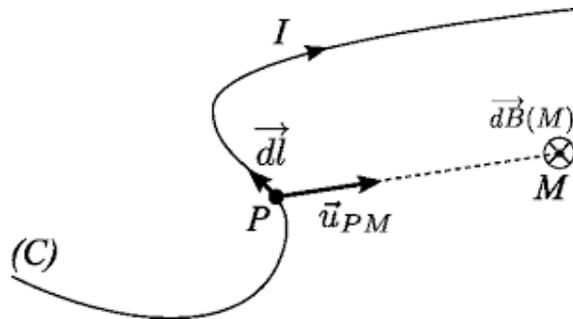
La variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé y engendre une fém induite

$$U = -\frac{d\phi}{dt}$$

L'induction électromagnétique est donc un phénomène qui dépend intrinsèquement du temps et, au sens strict, sort du cadre de la magnétostatique (étude des phénomènes magnétiques stationnaires). Le signe négatif détermine le sens du courant induit dans le circuit. Il est régi par la loi de Lenz qui énonce que le sens du courant induit est tel qu'il s'oppose par ses effets magnétiques à la cause qui a produit le courant.

VI.5. Loi de Biot et Savart

Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant d'intensité i et notons \vec{dl} un déplacement élémentaire le long de ce circuit orienté dans le même sens que le courant. On appelle élément de courant, le vecteur $\vec{dC} = i\vec{dl}$, dont la norme s'évalue en A.m. Cet élément de courant est à l'origine du champ magnétique \vec{B} . Le champ magnétique est relié aux éléments de courant par la loi de Biot et Savart :



La contribution d'un élément de courant $\vec{dC} = i\vec{dl}$, situé au point P, au champ total $\vec{B}(M)$ créé en M par une distribution de courants est donnée par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{dC} \wedge \vec{PM}}{(PM)^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Avec $\vec{r} = \vec{PM}$.

Le coefficient μ_0 , appelé perméabilité du vide, vaut exactement $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$. H désigne le henry, unité d'inductance.

Dans le cas d'une distribution de courant volumique, l'élément de courant \vec{dC} s'écrit :

$$\vec{dC} = \vec{\rho} dv$$

où $\vec{\rho}$ est le vecteur densité volumique de courant et dv le volume élémentaire.

De même, pour un courant surfacique, l'élément de courant \vec{dC} s'écrit :

$$\vec{dC} = \vec{\sigma} dS$$

où $\vec{\sigma}$ est le vecteur densité surfacique de courant et dS le volume élémentaire.

VI.6. Dipôle magnétique

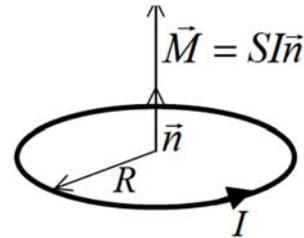
Moment magnétique d'une spire circulaire

Spire de rayon R parcourue par I

Surface de la spire : $S = \pi R^2$

Vecteur surface : $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$

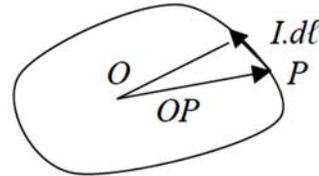
Le moment magnétique de la spire est : $\vec{M} = I\vec{S}$



Moment magnétique d'un circuit quelconque

surface quelconque : $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{OP} \wedge \vec{dl}$

moment magnétique : $\vec{M} = \frac{1}{2} \oint \vec{OP} \wedge I \cdot \vec{dl}$



Potentiel vecteur créé à grande distance par une spire

$$\vec{M} = I \cdot S \vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques :

$\vec{OP}(r, \pi/2, \varphi)$ P dans le plan xOy

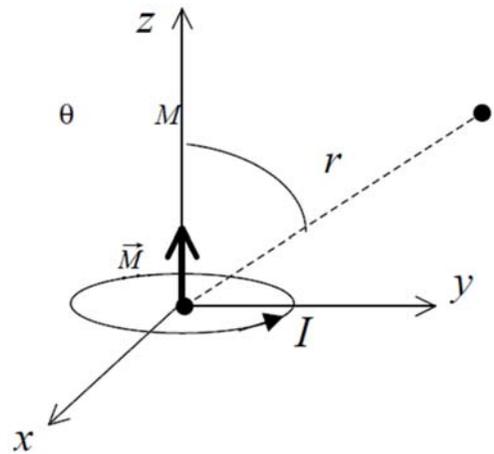
$\vec{OM}(r, \theta, \pi/2)$ M dans le plan yOz

et $r \gg R$

$I \cdot \vec{dl}$ crée en M un champ dont le potentiel vecteur vaut :

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl}}{PM} \quad \vec{A} = \oint \vec{dA}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot M \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{ou} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \wedge M$$



Référence

1. Daniel Brito, *Outils mathématiques pour la Physique*, université Joseph–Fourier Grenoble
2. René Lafrance, Jean Parent, *Physique 2 électricité et magnétisme, 5ed*, De Boeck, 2014
3. Harris Benson, *Physique 2 électricité et magnétisme*, De Boeck, 2014
4. Damir BUSKULIC, *Cours de physique*, Université de Savoie
5. E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben aïm, N. Piccioli, *La physique en fac, Électrostatique et Électrocinétique*, Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2006.
6. J. Ferreira, *Cours d'Electrostatique-Electrocinétique*, Université Joseph Fourier.
7. David FOLIO, *Cours d'électrocinétique*, ENSI de Bourges
8. J. M. Brébec, Ph. Denève, T. Desmarais, M.C Ménétrier, B. Noël, R. Noel, C. Orsini, *Électromagnétisme 1re année MPSI-PCSI-PTSI*, Hachette (2003).
9. D. Cordier, *Cours de Physique pour la Licence- Électromagnétisme*, Dunod (2007).
10. <http://www.cours-et-exercices.com>
11. <http://www.edu.upmc.fr/uel/physique/elecstat/>